

Algebra und Zahlentheorie.

Rychlík, K.: Eine Bemerkung zur Determinantentheorie. *J. f. Math.* **167**, 197 (1932).

Der übliche Beweis des Satzes: „Stimmen zwei Zeilen (Spalten) einer quadratischen Matrix überein, so verschwindet die zugehörige Determinante“ versagt für Körper der Charakteristik 2. Ein allgemeingültiger Beweis mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes stammt von H. Hasse. Es wird gezeigt, wie der übliche Beweis richtigzustellen ist, indem man erst im Ringe \mathfrak{R}^* operiert, der aus \mathfrak{R} , dem Ringe der ganzen rationalen Zahlen, durch Adjunktion der $n^2 - n$ Elemente als Unbestimmten hervorgeht. Rechnen mod. 2, isomorphes Einbetten und schließliches Spezialisieren der Unbestimmten lehrt dann die Richtigkeit des Satzes im erwünschten Körper.

Rolf Müller (Berlin).

Mordell, L. J.: On binary quadratic forms expressable as a sum of three linear squares with integer coefficients. *J. f. Math.* **167**, 12—19 (1932).

Gegeben sei eine positiv definite, binäre quadratische Form

$$d(ax^2 + 2hxy + by^2), \quad (1)$$

wo d, a, h, b ganze rationale Zahlen sind, $d > 0$ und a, h, b ohne gemeinsamen Teiler. Es entsteht die Frage, wann eine derartige Form sich als Summe von Quadraten ganzzahliger Linearformen darstellen läßt:

$$d(ax^2 + 2hxy + by^2) = \sum_{s=1}^n (a_s x + b_s y)^2 \quad (2)$$

mit ganzen rationalen a_s, b_s ($s = 1, 2, \dots, n$). Dieser Frage ist der Verf. schon in früheren Arbeiten nachgegangen. Hier stellt er zunächst in einer Übersicht für die Werte $n = 2, 3, 4, 5$ die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten d, a, h, b auf, die bestehen müssen, damit eine Darstellung (2) möglich ist. Für $n = 5$ und damit eo ipso für $n > 5$ ist die Darstellung (2) stets möglich ohne besondere Bedingungen. Die Kriterien erfordern der Natur der Sache entsprechend einige Fallunterscheidungen und können daher aus Raumgründen hier nicht wiedergegeben werden. Sodann gibt der Verf. für das $n = 3$ betreffende Kriterium, von dem bisher nur ein Spezialfall bewiesen war, einen vollständigen Beweis. Die Frage erscheint für $n = 3$ in der klassischen Form nach der Darstellbarkeit einer binären quadratischen Form durch eine ternäre, hier $X^2 + Y^2 + Z^2$, vermöge der Substitution

$$X = a_1 x + b_1 y, \quad Y = a_2 x + b_2 y, \quad Z = a_3 x + b_3 y.$$

Aber die klassische Theorie dieser Darstellungen ist bisher nur unter engeren Voraussetzungen ($d = 1$ und „eigentliche“ Darstellung) entwickelt worden. Verf. zieht es daher vor, nicht auf die Ergebnisse der klassischen Theorie zurückzugreifen, sondern unter seinen Voraussetzungen alles neu zu entwickeln. Im letzten Paragraphen zeigt der Verf., wie sich aus seinem Kriterium viele bekannte Resultate über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine spezielle binäre Form herleiten lassen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Wintner, A., and F. D. Murnaghan: On a polar representation of non-singular square matrices. (*Dep. of Math., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 676—678 (1931).

Die Hermitesche Matrix \mathfrak{H} heißt positiv definit, wenn die dazugehörige Hermiteische Form $\sum_{p,q} h_{pq} x_p \bar{x}_q$ positiv definit ist. Verff. beweisen den Satz: Jede nicht-singuläre quadratische Matrix \mathfrak{A} läßt sich eindeutig in der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{U} \mathfrak{P}_2$ darstellen, \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 positiv definit, \mathfrak{U} unitär. \mathfrak{A} ist dann und nur dann normal, wenn $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$.

Köthe (Münster).

Wintner, Aurel: On non-singular bounded matrices. Amer. J. Math. 54, 145—149 (1932).

Eine im Hilbertschen Sinne beschränkte unendliche Matrix heißt positiv definit, wenn sie nichtsingulär und hermitesch ist und die dazugehörige Hermitesche Form keinen negativen Wert annimmt. Mit Hilfe des Satzes, daß zu jeder positiv definiten Matrix \mathfrak{P} eine und nur eine positiv definite Matrix \mathfrak{U} gehört mit $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{P}$, wird bewiesen, daß jede beschränkte nichtsinguläre Matrix \mathfrak{A} sich eindeutig in der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{A} = \mathfrak{U} \mathfrak{P}_2$ darstellen läßt, \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 positiv definit, \mathfrak{U} unitär. \mathfrak{A} ist dann und nur dann normal, wenn $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$. Ferner gilt: Ist $\mathfrak{A} \mathfrak{U}_1 \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ unitär, \mathfrak{A} nichtsingulär und beschränkt, so gibt es eine unitäre Matrix \mathfrak{B} , so daß $\mathfrak{B} \mathfrak{U}_1 \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{U}_2$.

Köthe (Münster).

Speiser, Andreas: Über die Minima Hermitescher Formen. J. f. Math. 167, 88 bis 97 (1932).

Verf. überträgt die Methode von J. Züllig aus „Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche“ (Zürich 1928) auf höhere Dimensionenzahl. — Für alle $z = x + yi$ im Gaußschen Körper $K(i)$ mit der gekürzten Darstellung $z = p/q$, $(p, q) = 1$, beschreibe man im (x, y, t) -Raum die Kugeln mit Mittelpunkt $(x, y, \frac{1}{kn(q)})$ und Radius $\frac{1}{kn(q)}$, außerdem die unendliche Kugel $t = k/2$; dabei ist k eine positive Konstante und $n(q)$ die Norm von q . Für $k > 2$ liegen die Kugeln völlig getrennt. Für $k = 2$ berühren sich zwei Kugeln höchstens in einem Punkt. Für $k = \sqrt{3}$ liegt jeder Raumpunkt in oder auf einer solchen Kugel oder in hexaedrischen Raumstücken, die teilweise außerhalb der Kugeln liegen; ein solches Hexaeder ist z. B. durch die Kugeln zu $z = 0, 1, i, 1 + i, \frac{1+i}{2}$ und die Ebene $t = \sqrt{3}/2$ begrenzt. Für $k = \sqrt{2}$ endlich lassen die Kugeln keinen Raumpunkt unbedeckt. Die zu jedem k gehörige Raumteilung geht durch die Picardsche Gruppe in sich über. — Anwendungen: 1. Liegt die komplexe Zahl $\zeta = \xi + \eta i$ nicht in $K(i)$, so durchdringt die Gerade $x = \xi, y = \eta$ im Falle $k = \sqrt{3}$ das Innere unendlich vieler Kugeln; daraus folgt die Existenz unendlich vieler gekürzter Zahlen p/q aus $K(i)$ mit $|\zeta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{3} n(q)}$. 2. Für $k = 2$ liegt jeder Raumpunkt in mindestens einer Kugel; daraus folgt, daß es zu jeder positiv-definitiven Hermiteschen Form $H(p, q) = A p \bar{p} + B p \bar{q} + \bar{B} p \bar{q} + C q \bar{q}$ mit der Determinante $D = AC - B \bar{B}$ zwei ganze Zahlen p, q aus $K(i)$ mit $H(p, q) \leq \sqrt{2D}$ gibt. — Ähnliche Raumeinteilungen existieren zu jedem imaginär quadratischen Zahlkörper; Verf. untersucht noch den Körper der dritten Einheitswurzeln näher. Schließlich überträgt er die Überlegungen auf den Hurwitzschen Quaternionen-Körper und zeigt mittels geometrischer Überlegungen im fünfdimensionalen Raum folgende zwei Sätze: 1. Eine Quaternion z läßt sich durch unendlich viele gekürzte rationale Quaternionen $q^{-1}p$ so annähern, daß $|z - q^{-1}p| < \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{1}{n(q)}$ ist. — 2. Sind die mittleren Koeffizienten der Hermiteschen Form $H(p, q) = A p \bar{p} + \bar{B} q \bar{p} + \bar{p} q \bar{B} + C q \bar{q}$ konjugierte Quaternionen und ist $D = AC - B \bar{B}$, so gibt es zwei ganze Quaternionen p, q mit $H(p, q) \leq \sqrt{2D}$.

Mahler (Krefeld).

Takahashi, Shin-ichi: A note on Kakeya's theorem on algebraic equations. (Shiomi Inst., Osaka.) Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 13, 287—291 (1931).

Bedeutet ϱ das Maximum der absoluten Beträge der Wurzeln der Gleichung

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

so bestehen die bekannten Ungleichungen

$$\varrho \leq \text{Max} \left(1, \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{|a_0|} \right) \quad \text{und} \quad \varrho \leq \frac{(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{1/2}}{|a_0|}.$$

Sind $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$ und wendet man auf die Gleichung

$$(z-1) \cdot f(z) = a_0 z^{n-1} - (a_0 - a_1) z^n - \dots - (a_{n-1} - a_n) z - a_n = 0$$

die erste Ungleichung an, so erhält man sofort den bekannten Eneström-Kakeyaschen Satz. Sind die Koeffizienten $a_k = p_k + i q_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) komplex, sind $|a_0| > |a_1| > \dots > |a_n|$ und wendet man auf die Gleichung $(z-1) \cdot f(z) = 0$ die erste bzw. die zweite Ungleichung an, so ergeben sich die folgenden drei Sätze:

- (1) $\varrho \leq \sqrt{2}$, wenn $p_0 \geq p_1 \geq \dots \geq p_n > 0$ und $q_0 \geq q_1 \geq \dots \geq q_n > 0$ sind;
 (2) $\varrho \leq \frac{M(|a_0| - |a_n|) + |a_n|}{|a_0|} (\leq M)$, wo $M = \text{Max} \left(\frac{|a_{k-1} - a_k|}{|a_{k-1}| - |a_k|} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist; bzw.
 (3) $\varrho \leq \frac{[(1+N)|a_0|^2 + (1-N)|a_n|^2]^{1/2}}{|a_0|}$, wo $N = \text{Max} \left(\frac{|a_{k-1} - a_k|^2}{|a_{k-1}|^2 - |a_k|^2} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

ist. Ist nun $N \leq 1$ bzw. $N \geq 1$, so ist $\varrho \leq \sqrt{2}$ bzw. $\varrho \leq \sqrt{1+N}$.

Sz. Nagy (Szeged).

Wegner, Udo: Über einen Satz von Dickson. *Math. Annalen* **105**, 790–792 (1931).

Let $f(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ be a polynomial of odd prime degree k with rational integral coefficients. Let the constant term a_k be so defined that the Galois group of $f(x) = 0$ coincides with that of $g(x, t) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x - t$ where t is variable. If $f(x)$ factors completely into linear factors only for prime moduli of the form $kx \pm 1$, then $f(x)$ is (up to a linear transformation) of the form

$$f(x) = x^k + k\alpha x^{k-2} + k \sum_{l=2}^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{(k-l-1)(k-l-2)\dots(k-2l+1)}{1 \cdot 2 \dots l} \alpha^l x^{k-2l}$$

where α is a rational integer. This generalizes a theorem of Dickson [*Ann. of Math.* **11**, 91 (1897)].

MacDuffee (Columbus).

Carlitz, Leonard: The arithmetic of polynomials in a Galois field. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Amer. J. Math.* **54**, 39–50 (1932).

Für den Polynombereich über einem Galois-Feld $GF(p^r)$ kann man die Analoga der bekannten zahlentheoretischen Funktionen μ, λ, φ usw. definieren. Die summatorischen Funktionen dieser Funktionen, für die im Fall der ganzen Zahlen nur asymptotische Ausdrücke bekannt sind, lassen sich im Polynomfall explizit auswerten. Sodann wird das Restsymbol für die r -ten Potenzreste $[r = p^r - 1]$ eingeführt und das Reziprozitätsgesetz

$$\left\{ \frac{P}{Q} \right\} = (-1)^{e_P} \left\{ \frac{Q}{P} \right\} \quad [v = \text{Grad von } P, \varrho = \text{Grad von } Q]$$

bewiesen.

van der Waerden (Leipzig).

Nagell, Trygve: Bemerkungen über numerisches Rechnen mit algebraischen Zahlen. *J. f. Math.* **167**, 70–72 (1932).

α bzw. β seien irgendwie charakterisierte und mit beliebiger Genauigkeit berechenbare Nullstellen der rationalzahligen Polynome $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ bzw. $g(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$. Es wird eine Methode angegeben, die Gleichheit oder Ungleichheit von α und β zu entscheiden. Insbesondere kann man hiernach die Realität von α feststellen und das irreduzible rationalzahlige Polynom bestimmen, das α zur Nullstelle hat.

Grell (Jena).

Miller, G. A.: Groups involving a small number of conjugates. (*Dep. of Math., Univ. of Illinois, Urbana.*) *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 691–694 (1931).

Es werden die Gruppen aufgestellt, die einen und nur einen vollständigen Satz konjugierter nichtinvarianter Untergruppen enthalten. Es wird gezeigt, daß es nur endlich viele Gruppen gibt, die eine feste Anzahl (die > 1 sein muß!) von vollständigen Sätzen konjugierter nichtinvarianter Gruppenelemente enthalten. *St. Pietrkowski.*

Miller, G. A.: Complete sets of conjugates under a group. *Amer. J. Math.* **54**, 110 bis 116 (1932).

Die im vorangehenden Ref. genannten Probleme werden ausführlicher behandelt und erweitert.

Pietrkowski (Göttingen).

Miller, G. A.: Representation of a group as a transitive permutation group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, 857—860 (1931).

Es wird gezeigt: Zerlegt man eine Gruppe G in Nebengruppen nach einer Untergruppe H , und enthält jede dieser Nebengruppen Elemente aus einer weiteren Untergruppe K , so ist die größte im Durchschnitt (H, K) enthaltene invariante Untergruppe von K auch in einer Untergruppe von H enthalten, die ihrerseits invariant in G ist. — Jede Darstellung von G als transitive Permutationsgruppe kann man bekanntlich durch die Permutationen erhalten, die die Nebengruppen einer geeigneten Untergruppe H in G bei Multiplikation mit den Elementen von G erleiden. Ist nun eine mit G einstufig isomorphe, in der angegebenen Weise durch H erzeugte transitive Permutationsgruppe n -ten Grades gegeben, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß die dabei zu K gehörigen Permutationen ebenfalls eine transitive, mit K einstufig isomorphe Permutationsgruppe n -ten Grades bilden, daß Elemente von K in allen Nebengruppen von H auftreten. Soll die Darstellung von G mehrfach transitiv sein, so ist notwendig und hinreichend hierfür, daß eine geeignete Untergruppe K mit allen Nebengruppen von H in G mit genau einer Ausnahme Elemente gemeinsam hat.

Magnus (Göttingen).

Rella, Tonio: Über Abelsche Operatorgruppen. *J. f. Math.* **167**, 235—247 (1932).

Hat eine Abelsche Operatorgruppe \mathfrak{A} (= verallgemeinerte Abelsche Gruppe) mit kommutativem Operatorenring O eine endliche Basis, d. h. läßt sich jedes Element a von \mathfrak{A} durch endlich viele Elemente $a_1 \dots a_n$ von \mathfrak{A} in der Form $\gamma_1 a_1 \dots \gamma_n a_n = a$ (γ_i aus O) ausdrücken, so ist bekannt, daß, falls man in O den euklidischen Algorithmus ausführen kann, die Gruppe auch eine Minimalbasis besitzt, d. h. eine solche, in der jene Darstellung eindeutig ist. Verf. behandelt nun als Beispiel einen andersgearteten Operatorenring O , der dem Restklassenring der Polynome in einer Unbestimmten mit ganzen p -adischen Koeffizienten mod $(x^p - 1)$ isomorph ist. Er weist auch hier die Existenz einer Minimalbasis nach unter der Voraussetzung, daß eine endliche Basis existiert. Als Anwendungen ergeben sich: 1. eine Normalform für zyklische ganzzahlige Matrizen der Ordnung p , 2. Bestimmung eines Fundamentalsystems von ganzen Zahlen gewisser algebraischer Erweiterungen des Körpers der p -adischen Zahlen, in dem zu gewissen Elementen des Systems teils $p - 1$, teils p algebraisch konjugierte vorkommen, 3. ein analoger Satz über die Gruppe der Einseinheiten eines p -adischen Körpers.

St. Pietrkowski (Göttingen).

Kerékjarto, B. de: Sur l'existence de racines carrées dans les groupes continus. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 1384—1385 (1931).

Verf. beweist, daß in einer n -gliedrigen kontinuierlichen Gruppe jedes Element in der Umgebung der Eins eine Quadratwurzel besitzt, die mit ihm gegen die Eins strebt, und daß im Fall einer kommutativen Gruppe jedes Gruppenelement eine Quadratwurzel besitzt. Der Beweis beruht auf zwei Hilfssätzen über involutorische Transformationen von Mannigfaltigkeiten, von denen der erste neuerdings von M. H. A. Newman bewiesen wurde, während der zweite, wie der Verf. mitteilt, ähnlich bewiesen werden kann.

van der Waerden (Leipzig).

Shimizu, Tatsujirô: On the iteration of algebraic functions. II. (*Math. Inst., Imp. Univ., Tokyo.*) *Proc. phys.-math. Soc. Jap.*, III. s. **13**, 292—296 (1931).

Fortsetzung der in einer früheren Abhandlung (dies. Zbl. **3**, 110) begonnenen Untersuchungen über die Iterierten algebraischer Funktionen. Unter anderem sucht der Verf. Bedingungen dafür, daß in einem endlichen Bereich nur endlich viele Iterierte eines gegebenen Wertes vorkommen; ebenso die Bedingungen dafür, daß es,

wenn der unendlich ferne Punkt Fixpunkt aller Zweige ist, überhaupt nur endlich viele verschiedene iterierte Funktionen gibt.

Ahlfors (Paris).

Jung, Heinrich W. E.: Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. B. Totale Differentiale. (Transzendenter Teil.) J. f. Math. **167**, 346—359 (1932).

Die Theorie der linearen Integrale zweiter Gattung eines Körpers K von algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher x, y , wie sie von Picard und Simart in ihrem Buch: *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (I. u. II, Paris 1897, u. 1906) dargestellt ist, wird mittels der arithmetischen Methode entwickelt (genauer mit der „*méthode mixte*“ von Hensel und Landsberg). K wird als Körper algebraischer Funktionen von x betrachtet, die von dem Parameter y abhängen, zu ihm gehört eine mit y veränderliche Riemannsche Fläche $R(y)$. Die Periodenkreise von $R(y)$ zerfallen in zwei Arten: die invarianten, welche in sich übergehen, wenn y einen geschlossenen Weg durchläuft, und die varianten Kreise, die dadurch definiert sind, daß irgendein Kreis sich stets um einen varianten Kreis ändert, wenn y einen geschlossenen Weg beschreibt. Die invarianten Kreise bilden eine lineare Schar S (ebenso die varianten), die Dimension r dieser Schar S ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen totalen Differentiale zweiter Gattung von K , vermindert um die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale zweiter Gattung, die bloß von y abhängen, vermindert also um das doppelte Geschlecht $2p_2$ des nur von y abhängigen Teilkörpers von K . Variante Kreise und invariante Kreise zusammen ergeben eine Schar, die die gleiche Dimension hat wie die Schar aller Kreise, aber nicht notwendig mit ihr übereinstimmen muß. Für die Dimension der Schar der Integrale erster Gattung ergibt sich, daß sie halb so groß ist wie die Dimension der Schar der Integrale zweiter Gattung.

Deuring (Leipzig).

Tschebotarow, N.: Über eine Verallgemeinerung eines Cliffordschen Satzes. Rend. Circ. mat. Palermo **55**, 187—197 (1931).

Die Arbeit gibt für das Geschlecht p eines Körpers K von algebraischen Funktionen in einer Veränderlichen eine obere Schranke an unter der Voraussetzung, daß die Dimension n und die Ordnung m einer die Differentialklasse teilenden Divisorenklasse A bekannt ist. Das Ergebnis lautet: Ist $m = 2n + r - 1$ und dabei $2n - r - 4 > 0$, so ist stets

$$p \leq n + 2r + \left\lfloor \frac{2r(+1)}{2n - r - 4} \right\rfloor,$$

es sei denn, der Körper K ist hyperelliptisch. Setzt man $r = 0$, so erhält man hieraus einen bekannten Cliffordschen Satz.

F. K. Schmidt (Erlangen).

● **Hancock, Harris: Foundations of the theory of algebraic numbers. Vol. 1. Introduction to the general theory.** New York: Macmillan Comp. 1931. XXVII, 602 S. geb. \$ 8.—

Der vorliegende erste Band ist als Einleitung zur allgemeinen Theorie des zweiten Bandes gedacht und behandelt vorwiegend die Theorie der quadratischen Zahlkörper. Die Begriffe Zahlkörper, ganze Größe, Basis, Diskriminante usw. werden zunächst allgemein eingeführt. Es folgt die Dedekindsche Theorie der Moduln und Ordnungen, ohne Zusammenhang damit die Kroneckersche Theorie der Modulsysteme, schließlich ohne Zusammenhang mit diesen beiden die Theorie der Ideale in quadratischen Körpern, die bis zu den Normenrestsymbolen und Geschlechtern durchgeführt wird. Als Anwendungen werden das quadratische Reziprozitätsgesetz, die Spezialfälle 3 und 4 des großen Fermatschen Satzes und der Zusammenhang der Idealklassen mit den Klassen quadratischer Formen hergeleitet. Schließlich werden die Hauptsätze der Idealtheorie für kubische Körper bewiesen.

van der Waerden (Leipzig).

Schur, I.: Einige Bemerkungen über die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. J. f. Math. **167**, 264—269 (1932).

K sei ein algebraischer Zahlkörper des Grades n , D seine Diskriminante. Die höchste Potenz einer in D aufgehenden Primzahl sei p^δ : $p^\delta \nmid D$ [als Symbol für

$p^\delta/D, p^{\delta+1} \nmid D]$. Hilbert hat mit Hilfe der Trägheitsgruppe bewiesen: $\delta \leq \gamma(n)$; ein expliziter Ausdruck fehlt dort. Sei \mathfrak{p} ein Primideal und: $\mathfrak{p}^e \nmid p, \mathfrak{p}^e \nmid e, \mathfrak{p}^a \nmid \mathfrak{d}$, wenn \mathfrak{d} die Differenten von K ist. Nach Hensel folgt: $\delta \leq s \cdot e + e - 1$. Für Galoissche Körper (G. K.) gilt: $e \cdot \delta = d \cdot n$; daher wird, mit $p^a \nmid n$: (1) $\delta \leq s \cdot n + n - \frac{n}{e} \leq a \cdot n + n - 1$, also, wegen $p \geq 2$: $\delta \leq \frac{n \cdot \log n}{\log 2} + n - 1$. — Nach einem Satz von Ore, der für den Fall beliebiger Körper das genaue Maximum $\delta \leq \mu(n, p)$ angibt, gilt das auch dann noch. Man kann aber auch elementar aus (1) für beliebige Körper eine obere Schranke für δ gewinnen durch Vergleich mit dem zugehörigen G. K. $(D^{n^*/n} | D^*)$; es wird $\delta < n^2 + n$. Schließlich läßt sich auch (1) mit Hilfe $e \cdot \delta = d \cdot n$ aus den Grundbegriffen elementar ableiten. Für die G. K. kennt man das genaue Maximum von δ noch nicht; $an + n - 1$ ist es schon nach Bauer nicht. Für einen G. K. mit (2) $\delta = an + n - 1$ ist notwendig $e = n$ und $\sigma = s = a$, mit $\sigma = \left[\frac{d}{e} \right] = \left[\frac{\delta}{n} \right]$, ferner für n und p : 1. $p - 1 | a \cdot n$ nach Bauer, 2. $m | p - 1$, wenn $n = p^a \cdot m$, nach Hilbert. Das reicht aber für (2) nicht hin, wie $n = 9, p = 3$ zeigt. Die abelschen Körper, die (2) für ein gegebenes p erfüllen, werden nämlich angegeben. Damit ist auch $a = 0$ erledigt; denn hier kann (2) nur von zyklischen Körpern genügt werden. $a = 1$ zieht $n = p \cdot (p - 1)$ nach sich. Der Verf. zeigt: Es gibt unendlich viele G. K. dieses Grades, die (2) erfüllen [$\delta = 2n - 1$]. Ein Satz von Perron, dessen Anwendung oben noch durch einen eleganten einfachen Schluß erübrigt wird, verhilft dann zu der Einsicht: Für jedes p und $n = p^a \cdot m$ gibt es Körper mit $\delta = a \cdot n + n - 1$, nämlich alle, die erzeugt sind durch eine Wurzel einer ganzzahligen Gleichung:

$$F(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0,$$

für die 1. $p \nmid c_n$, 2. für $v \neq n$ $p | c_v$ und $p^{a+1} | (n - v) c_v$ ist. Daher und nach dem früheren kann eine solche Gleichung offenbar keine Galoissche Gleichung sein, wenn nicht gleichzeitig $m | p - 1$ und $p - 1 | a \cdot n$ ist oder wenn $n = 9$ und $p = 3$ ist.

Rolf Müller (Berlin).

Remak, Robert: Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten. J. f. Math. 167, 360—378 (1932).

Es bezeichne k einen algebraischen Zahlkörper des Grades n , und es seien die Zahlen r_1, r_2 und $r = r_1 + r_2 - 1$ wie üblich definiert. Verf. betrachtet die Logarithmen der sämtlichen Einheiten des Körpers (nicht nur der Beträge der Einheiten). Die Logarithmen der Einheiten bilden ein $(2r + 1)$ -dimensionales Gitter \mathfrak{G} in dem $(2r + 2)$ -dimensionalen Raume R_{2r+2} der Real- und Imaginärteile der Logarithmen der ersten $r_1 + r_2$ Konjugierten aller Körperzahlen. Dabei gelangen innerhalb \mathfrak{G} auch die Logarithmen der Einheitswurzeln zur Darstellung, und es entstehen natürlich aus einer Einheit unendlich viele Gitterpunkte, je nach der Fixierung des Imaginärteils des Logarithmus. Das Volumen R^* des Grundparallelotops dieses Gitters unterscheidet sich von dem Regulator R nur um bekannte Faktoren, so daß eine Abschätzung von R^* nach unten sofort eine solche für R nach sich zieht. Ist jetzt η ein einer Einheit ε im R_{2r+2} zugeordneter Vektor, so sind die Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_{2r+1}$ dieses Vektors bezüglich eines Systems von Grundvektoren des Gitters \mathfrak{G} ganze rationale Zahlen, und $|\eta|^2$ ist eine definite quadratische Form $Q(x_1, x_2, \dots, x_{2r+1})$ in diesen $2r + 1$ ganzzahligen Veränderlichen. Nach einer Untersuchung von Blichfeldt gilt für das Minimum M , das Q für ganze rationale x_i annimmt, eine Ungleichung

$$M \leq \frac{2}{\pi} \left(\Gamma(k + \frac{5}{2}) \right)^{\frac{2}{2k+1}} R^{*2k+1},$$

welche R^* nach unten abzuschätzen gestattet, sobald eine Abschätzung von M nach unten gewonnen ist. Eine solche Abschätzung von M nach unten wird nun im weiteren hergeleitet. Der Gitterpunkt mit minimalem $|\eta|^2$, d. h. der dem Nullpunkt zunächst

gelegene Gitterpunkt, ist einer der unendlich vielen Gitterpunkte, welche einer gewissen Einheit ε_1 zugeordnet sind. Ist $\varepsilon_1 \neq 1$, so ergibt sich aus der Tatsache, daß $|N(\varepsilon_1 - 1)| \geq 1$ ist, eine Abschätzung

$$\sqrt[n]{M} \geq \frac{n}{\sqrt{r_1 + r_2}} \log 2.$$

Im anderen Falle dagegen gilt danach

$$\sqrt[n]{M} \geq \min \left(\frac{n}{\sqrt{r_1 + r_2}} \log 2, 2\pi \right),$$

und hier kommt es ersichtlich auf die Größe von n an, indem dies Minimum gleich $\frac{n}{\sqrt{r_1 + r_2}} \log 2$ ist, falls $n \leq 41$, und $= 2\pi$ ist, falls $n \geq 166$; für dazwischenliegende Werte von n hängt das Minimum von r_1 und r_2 ab. — Eine etwas modifizierte Methode wendet Verf. auf total reelle Körper an, in denen er nur die reellen Logarithmen der Quadrate der Einheiten heranzieht. Eine Vereinfachung ergibt sich hier aus der Tatsache, daß der Fall $\varepsilon_1^2 = 1$ nicht vorkommen kann. Diese modifizierte Methode wird ferner auf beliebige Körper übertragen, und es wird dann ausführlich diskutiert, welche der beiden Methoden die bessere Abschätzung liefert. Die genauere Auswertung der unteren Schranken führt unter anderem zu folgendem Resultat: Im total imaginären Falle $r_1 = 0$ geht die untere Schranke für R wie $C^n n^{-n/4}$ gegen Null. Im total reellen Falle $r_2 = 0$ wächst die untere Schranke wie $C \cdot c^n / n^2$ ins Unendliche, wo $C > 0$ und $c > 1$ als numerische Konstanten angesehen werden können. Hier zeigt eine numerische Rechnung überdies, daß stets $R > 1/1000$ für $r_2 = 0$. Petersson.

Furtwängler, Ph.: Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper. J. f. Math. **167**, 379–387 (1932).

Jede absolute Idealklasse eines algebraischen Zahlkörpers geht im allgemeinen noch nicht in einem echten Unterkörper des absoluten vollständigen Klassenkörpers in die Hauptklasse über. Dagegen gelingt Verf. der Nachweis des folgenden Satzes: Ist die Ordnung sämtlicher Idealklassen höchstens durch die erste Potenz von 2 teilbar, so lassen sich die Basiselemente für die Faktorgruppe nach der Untergruppe der Klassen ungerader Ordnung so wählen, daß jede Basisklasse bereits in einem relativ-quadratischen unverzweigten Körper zur absoluten Hauptklasse wird. Für eine beliebige Wahl der Basisklassen verliert auch dieser Satz im allgemeinen seine Richtigkeit. Der Beweis wird mit Hilfe des Artinschen Reziprozitätsgesetzes auf eine Aussage über Normalteiler vom Index 2 von zweistufigen Gruppen zurückgeführt. Dabei erweist es sich als möglich, sich auf solche zweistufige Gruppen zu beschränken, bei welchen die Kommutatoren invariante Gruppenelemente und mit Ausnahme des Einheits-elementes von der Ordnung 2 sind. Tausky (Göttingen).

Hasse, Helmut: Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über das allgemeine Normenrestsymbol. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. H. **1**, 64 bis 69 (1931).

In seinem Bericht [Jber. D. M.-V. Erg.-Bd. **6** (1930)] hat H. Hasse folgenden Satz bewiesen: Sei k ein endlicher algebraischer Zahlkörper, K/k zyklisch von Primzahlgrad; damit dann die Zahl $\beta \neq 0$ aus k Norm einer Zahl aus K ist, ist notwendig und hinreichend, daß das allgemeine Normenrestsymbol $\left(\frac{\beta, K}{p} \right) = 1$ ist für alle Primstellen p von k . In der vorliegenden Note wird dieser Satz auf zyklische Körper K/k beliebigen Grades ausgedehnt. Andererseits wird am Beispiel des Körpers $K = k(\sqrt{-39}, \sqrt{-3})$ und der Zahl $\beta = 3$ gezeigt, daß er für Abelsche, aber nicht zyklische Körper nicht zu gelten braucht. F. K. Schmidt (Erlangen).

Hasse, Helmut: Theorie der zyklischen Algebren über einem algebraischen Zahlkörper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. H. **1**, 70–79 (1931).

Vorläufige Mitteilung einer Theorie der zyklischen Algebren \mathfrak{A} über einem endlichen algebraischen Zahlkörper Ω als Grundkörper, die von der Frage der Charakte-

risierung einer solchen Algebra \mathfrak{A} durch ein vollständiges System von Invarianten ausgeht. Das gesuchte Invariantensystem wird mit Hilfe des Normenrestsymbols für die Primstellen \mathfrak{p} des Grundkörpers Ω in einem zum Aufbau von \mathfrak{A} benutzten zyklischen Körper \mathfrak{Z} gewonnen. Jeder Primstelle \mathfrak{p} von Ω läßt sich nämlich mit Hilfe dieses Normenrestsymbols eine ganze Zahl $v_{\mathfrak{p}}$ so zuordnen, daß die Zahlen $v_{\mathfrak{p}}$ zusammen mit dem Grad n von \mathfrak{A} ein vollständiges Invariantensystem von \mathfrak{A} darstellen. Auf Grund dieser Charakterisierung von \mathfrak{A} gewinnt man dann eine Übersicht über alle zyklischen Körper \mathfrak{Z} , die zur Erzeugung derselben Algebra \mathfrak{A} verwendet werden können. Im zweiten Teil der Note werden die soeben angeführten Resultate als Spezialfall einer invariantenmäßigen Charakterisierung der zyklischen Algebren bis auf Ähnlichkeit angesehen. Dabei heißen zwei normale einfache Algebren ähnlich, wenn die nach dem zweiten Wedderburnschen Struktursatz in ihnen steckenden Divisionsalgebren isomorph sind. Auch die invariantenmäßige Charakterisierung der zyklischen Algebra \mathfrak{A} bis auf Ähnlichkeit läßt sich mit Hilfe der Normenrestsymbole bewerkstelligen. Zum Schluß wird gezeigt, wie die Theorie der zyklischen Algebren sich in den aufgestellten Invarianten ausdrückt.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Tschebotarow, N.: Untersuchungen über relativ Abelsche Zahlkörper. J. f. Math. 167, 98—121 (1932).

Ein Beitrag zum Problem der Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Gruppe auf Grund der Klassenkörpertheorie. — Die §§ 1—4 enthalten Sätze über relativ Abelsche Gruppen, d. h. solche Gruppen \mathfrak{G} , in denen ein Abelscher Normalteiler \mathfrak{H} besonders hervorgehoben wird. In § 2 werden einige hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß jeder direkte Faktor von \mathfrak{H} , der Normalteiler in \mathfrak{G} ist, einen anderen Faktor auch als Normalteiler von \mathfrak{G} zuläßt. In § 3 wird jeder Abelschen Gruppe \mathfrak{H} eine zu \mathfrak{H} isomorphe Gruppe $\hat{\mathfrak{H}}$, die „Körpergruppe“, zugeordnet, derart, daß jeder Untergruppe \mathfrak{R} von \mathfrak{H} eine Untergruppe $\hat{\mathfrak{R}}$ von $\hat{\mathfrak{H}}$ entspricht, wobei $\hat{\mathfrak{H}} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{R}$ ist und wobei dem Durchschnitt das Kompositum entspricht. Läßt sich $\hat{\mathfrak{H}}$ derart mit \mathfrak{H} identifizieren, daß \mathfrak{R} und $\hat{\mathfrak{R}}$ stets zugleich Normalteiler in \mathfrak{G} sind, so heißt \mathfrak{H} eine duale Gruppe in bezug auf \mathfrak{G} . In § 4 wird der Begriff der Scholzschen Gruppe eingeführt. \mathfrak{H} sei ein direktes Produkt $\mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2 \times \dots \times \mathfrak{h}_k$ von zyklischen Gruppen. Der Normalisator \mathfrak{N}_i von \mathfrak{h}_i umfasse \mathfrak{H} . Die Nebengruppen $\mathfrak{N}_i S_i$ in \mathfrak{G} nach \mathfrak{N}_i seien den \mathfrak{h}_i derart eindeutig zugeordnet, daß $S_i \mathfrak{h}_i S_i^{-1} = \mathfrak{h}_i$ ist. Der Durchschnitt aller \mathfrak{N}_i sei gleich \mathfrak{H} . Dann heißt \mathfrak{G} eine Scholzche Gruppe. Der Verf. vermutet, daß die Struktur von \mathfrak{G} durch die von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{h}_2 \times \mathfrak{h}_3 \times \dots \times \mathfrak{h}_k$ und den \mathfrak{h}_i bestimmt wird. Unter einer einschränkenden Voraussetzung wird die Vermutung bewiesen. In § 5 werden der Begriff des „rein verzweigten“ Körpers K über k , der keinen unverzweigten Unterkörper über k enthält, sowie der Kroneckersche Begriff der Komposition zyklischer Körper eingeführt. In § 6 wird die Struktur der absoluten Galoisschen Gruppe \mathfrak{G} eines über gegebenem k relativ Abelschen Körpers K für den Fall untersucht, daß der Führer \mathfrak{f} der Klassengruppe ein Primideal ist. In welchen Fällen \mathfrak{G} eine „Scholzche Gruppe“ ist, ist dem Ref. nicht klargeworden. Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppen von \mathfrak{f} werden bestimmt. Die Frage nach der Existenz eines Primideals \mathfrak{f} und damit auch eines Körpers K bei gegebenen \mathfrak{G} und k bleibt unerledigt. In § 7 wird schließlich der Fall zusammengesetzter Führer betrachtet.

van der Waerden (Leipzig).

Artin, E.: Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper. J. f. Math. 167, 157 bis 159 (1932).

Neuer vereinfachter Beweis des Ostrowskischen Satzes, der besagt, daß jede Bewertung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers k entweder durch ein Primideal \mathfrak{p} von k oder durch den absoluten Betrag, d. h. durch eine unendliche Primstelle erzeugt wird.

F. K. Schmidt (Erlangen).

Fueter, Rudolf: Über eine spezielle Algebra. J. f. Math. 167, 52—61 (1932).

Sei k ein quadratischer Körper mit den Automorphismen $\varrho, \varrho^2 = 1$ seiner Galois-Gruppe, K sei ein über k relativ zyklischer Körper von Primzahlgrad l und den Automorphismen $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^l = 1$ seiner relativen Galois-Gruppe; es sei K absolut galoissch, doch nicht Kreiskörper. Für die Zahlentheorie von K bedeutsam sind dann die symbolischen Potenzen $A^{(\varepsilon, \varrho)}$ von Zahlen A aus K mit ganzrationalzahligen Polynomen $f(\varepsilon, \varrho)$ von ε, ϱ . Sie führen auf das Studium des assoziativen hyperkomplexen Systems \mathfrak{A} der Elemente $\xi = \sum_{k=0}^{l-1} (u_k + \varrho v_k) \varepsilon^k$ mit den Relationen $\varrho^2 = 1, \varepsilon^l = 1, \varrho \varepsilon = \varepsilon^{l-1} \varrho, \varepsilon \varrho = \varrho \varepsilon^{l-1}$. Für \mathfrak{A} , das halbeinfach ist, werden idempotente Elemente, Diskriminante und eine Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3$ in Divisionsalgebren $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und eine einfache Algebra \mathfrak{A}_3 sowie die Darstellung von \mathfrak{A}_3 als voller Ring von Matrizen zweiten Grades in $k(\zeta + \zeta^{-1})$ [$\zeta = l^{\text{te}}$ prim. Einheitswurzel] explizit aufgestellt. Für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und insbesondere \mathfrak{A}_3 werden die Maximalordnungen bestimmt und in ihnen nach Speiser die rationalen Primzahlen in Primideale zerlegt; dabei ergibt sich, daß in \mathfrak{A}_3 so viele Typen von Maximalordnungen auftreten wie Idealklassen in $k(\zeta + \zeta^{-1})$.
Grell (Jena).

Nowlan, F. S.: A note on primitive idempotent elements of a total matrix algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 37, 854—856 (1931).

Es wird gezeigt: Die Bedingungen $\sum_p \alpha_{pp} = 1$ und $\alpha_{pi} \alpha_{jq} = \alpha_{pq} \alpha_{ji}$ ($p, q, i, j = 1, 2, \dots, n$) sind notwendig und hinreichend dafür, daß das Element $\sum_{p,q=1}^n \alpha_{pq} e_{pq}$ ein primitives Idempotent des vollständigen Matrizenringes n -ten Grades in einem kommutativen Körper ist.
Köthe (Münster).

Wedderburn, J. H. M.: Non-commutative domains of integrity. J. f. Math. 167, 129—141 (1932).

Als Integritätsbereiche werden — im allgemeinen nichtkommutative — Ringe ohne Nullteiler mit Einselement bezeichnet. Es handelt sich wesentlich um euklidische Bereiche, also solche, für die sich ein „absoluter Betrag“ definieren läßt, so daß der euklidische Algorithmus gilt. Daraus folgt bekanntlich die Existenz von größtem gemeinsamen Teiler und kleinstem gemeinsamen Vielfachen, nicht aber die eindeutige Zerlegbarkeit der Elemente in unzerlegbare. Einige an Stelle dieser Eindeutigkeit tretende Aussagen werden angegeben. Es wird weiter die Existenz des Quotientenkörpers nachgewiesen [Spezialfall eines Satzes von Ö. Ore, Ann. of Math. 32 (1931); dies. Zbl. 1, 266] und die Elementarteilertheorie entwickelt. Den bekannten Resultaten in den Büchern von Dickson (Algebras and their Arithmetics) und v. d. Waerden (Moderne Algebra 2) werden hier noch einige Ergänzungen zugefügt.

E. Noether (Göttingen).

Ore, Øystein: Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen. I. J. f. Math. 167, 221—234 (1932).

Die hier gegebene Entwicklung der formalen Theorie der linearen Differentialgleichungen beruht auf der Tatsache, daß die Differentialausdrücke einer Veränderlichen einen nichtkommutativen Integritätsbereich bilden, der einen euklidischen Algorithmus zuläßt. Es existiert also zu je zweien ein kleinstes gemeinsames Vielfaches, und daraus folgt nach einem vom Verf. an anderer Stelle [Ann. of Math. 32 (1931); dies. Zbl. 1, 266] bewiesenen Satz die Existenz des Quotientenkörpers. Die Sätze über Ausdrücke gleicher Art werden durch Einführung einer Transformation einfach bewiesen, und es wird noch gezeigt, daß zwei Ausdrücke immer gleichzeitig rechts und links von gleicher Art sind. — Die gegebenen Beweise verlieren ihre Gültigkeit beim Übergang zu mehr Veränderlichen, während — wie in der zitierten Arbeit von E. Noether und W. Schmeidler gezeigt war — bei passender Formulierung ein großer Teil der Resultate erhalten bleibt.

E. Noether (Göttingen).

Analysis.

Schlesinger, Ludwig: Ein Produktintegral mit Stetigkeitssprung. *J. f. Math.* **167**, 73—78 (1932).

Das längs einer geschlossenen Kurve C erstreckte „Produktintegral“

$$F(x) = \int_C \left(\frac{M(t)}{x-t} + I \right) dt,$$

in dem M eine auf C beschränkte und L -integrierbare Matrix bedeutet (zur Def. vgl. dies. Zbl. **1**, 15), stellt sowohl im Innern wie im Äußern von C je eine Matrix holomorpher Funktionen dar. Verf. bestimmt die nur von der Durchgangsstelle abhängige Sprungmatrix, mit der sich diese Matrizen $F_i(x_i)$ und $F_a(x_a)$ beim Durchschreiten der Kurve multiplizieren und berechnet sodann die auf C fast überall existierenden Randmatrizen selbst. Zuletzt untersucht er, welche Beziehung in dem Fall, daß $M(t)$ fast überall mit den Randwerten einer innerhalb C holomorphen Innenmatrix $M_i(x_i)$ übereinstimmt, zwischen $M_i(x_i)$ und $F_i(x_i)$ besteht. v. Koppensfels (Hannover).

Labocetta, Letterio: Sul prolungamento o completamento delle funzioni di variabile reale. *Boll. Un. mat. ital.* **10**, 259—265 (1931).

Aus zwei Funktionen, die in zwei Bereichen wechselweise reelle und imaginäre Werte annehmen, kann eine Funktion hergestellt werden, die in beiden Bereichen die reellen Werte annimmt. Wie dies geschieht, zeigt ein Beispiel, etwa: Die Gleichung $y^2 = x \operatorname{sgn} x$ umfaßt die beiden Parabeln $y^2 = x$ und $y^2 = -x$. Insbesondere lassen sich so die Winkel- und die Hyperbelfunktionen koppeln. Erwähnt sei noch die Darstellung für den natürlichen Logarithmus: $\int_{\operatorname{sgn} x}^x dx/x$. L. Schrutka (Wien).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Some properties of conjugate functions. *J. f. Math.* **167**, 405—423 (1932).

Es handelt sich um die Mittelwerte

$$M_\lambda(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta \right)^{1/\lambda}, \quad M_\lambda(r, u) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r, \vartheta)|^\lambda d\vartheta \right)^{1/\lambda},$$

wobei $f(z) = f(re^{i\vartheta}) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta)$ eine für $r < 1$ reguläre Funktion sei. Bisher hat man sich im wesentlichen auf den Fall $\lambda > 1$ beschränkt; hier wird der schwierigere Fall $\lambda \leq 1$ behandelt. Insbesondere werden die tiefliegenden Sätze bewiesen: 1. Aus $M_\lambda(r, u) = O((1-r)^{-a})$, $a > 0$, folgt das gleiche für $M_\lambda(r, v)$. 2. Aus $M_\lambda(r, u) = O(1)$ folgt $M_\lambda(r, v) = O\left(\lg \frac{1}{1-r}\right)$. Einige scharfsinnig konstruierte Beispiele zeigen die Tragweite dieser Sätze. Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Jackson, Dunham: On the application of Markoff's theorem to problems of approximation in the complex domain. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, 883—890 (1931).

Le théorème de A. Markoff en question (1889) s'énonce comme il suit: $P_n(x)$ étant un polynome de degré n l'inégalité $|P_n(x)| \leq M$ ($-1 \leq x \leq 1$) entraîne $|P'_n(x)| \leq n^2 M$. Soit (D) un domaine fini intérieur à une courbe de Jordan simple et fermée

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (0 \leq t \leq p) \quad (C)$$

les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz; on admet, de plus, que, du tout point de (C) , il est possible de tracer un segment de longueur fixe qui soit intérieur à (D) . — Soit encore $f(z)$ une fonction régulière dans (D) et continue dans $(D) + (C)$. — $P_n(z)$ étant un polynome d'approximation d'ordre m (unique dans le cas où $m > 1$), c'est-à-dire celui qui minimise l'intégrale

$$\int_0^p \varrho(t) |f(z) - P_n(z)|^m dt, \quad z = \varphi(t) + i\psi(t) \quad (0 < \underline{\varrho} \leq \varrho(t) \leq \bar{\varrho} < \infty, m > 0)$$

on démontre, en s'appuyant sur le théorème de Markoff, que $P_n(z)$ converge vers $f(z)$, uniformément dans $(D) + (C)$, à condition que l'on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/m} E_n(f) = 0,$$

où $E_n(f)$ est la meilleure approximation de $f(z)$ au moyen d'un polynôme de degré n dans le même domaine. — Ce résultat est à rapprocher à un antérieur (Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 851—857), où, en partant de l'inégalité due à S. Bernstein (1912)

$$|p'(x)| \leq nM/\sqrt{1-x^2}, \text{ l'auteur obtient une condition de convergence moins restrictive}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/m} E_n(f) = 0;$$

or, dans la présente note, les hypothèses imposées au domaine considéré sont plus générales.

W. Gontcharoff (Charkow).

Mitra, Pramathanath: On a generalised theorem on integral inequality. Bull. Calcutta Math. Soc. **23**, 129—154 (1931).

In einer früheren Arbeit [Bull. Calcutta Math. Soc. **22** (1930)] hat Verf. die folgende Ungleichung bewiesen (die übrigens durch Umformung aus einer bekannten Tchebycheffschen hervorgeht):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{g(x)} dx \leq (x_2 - x_1) \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx}. \quad (1)$$

Hierbei sind f/g und g im Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$ monotone positive Funktionen. Das obere Zeichen steht, wenn f/g und g beide nicht abnehmen oder beide nicht zunehmen, das untere, wenn eine der Funktionen f/g und g nicht zu-, die andere nicht abnimmt. In der vorliegenden Arbeit wird durch einen Induktionsschluß aus (1) die folgende Ungleichung hergeleitet:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f_1 f_2 \dots f_n}{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}} dx \leq \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_1 dx \int_{x_1}^{x_2} f_2 dx \dots \int_{x_1}^{x_2} f_n dx}{\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 dx \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 dx \dots \int_{x_1}^{x_2} \varphi_{n-1} dx}. \quad (2)$$

Hierbei sind $f_1, f_2, \dots, f_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ in $x_1 \leq x \leq x_2$ positive stetige Funktionen, so daß $f_1 \cdot f_2 \dots f_{v-1} / \varphi_1 \cdot \varphi_2 \dots \varphi_{v-1} = \psi_v$ und $\varphi_{v-1} / f_v = \chi_v$ für $v = 2, 3, \dots, n$ monoton sind. Das obere (untere) Zeichen steht, wenn sich für jedes dieser v ψ_v und χ_v im selben (entgegengesetzten) Sinne ändern. Ersetzt man in (2) gewisse f_v, φ_v durch 1, so ergeben sich einige bekannte Ungleichungen (jedoch nicht immer für den vollen Funktionenbereich, für den sie gelten). Ferner werden in (2) spezielle Funktionen eingesetzt und die entstehenden Ungleichungen aufgeschrieben.

W. Fenchel.

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Some new cases of Parseval's theorem. Math. Z. **34**, 620—633 (1932).

Für die Faltung $P(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ zweier in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ wird eine Reihe von Sätzen über Konvergenz und (C, δ) -Summierbarkeit auf dem Kreise $|z| = 1$ bewiesen, und zwar unter der Voraussetzung, daß $f(z)$ einer Integrierbarkeitsbedingung, $g(z)$ einer (verallgemeinerten) Lipschitz-Bedingung genügt.

R. Schmidt (Kiel).

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: An additional note on Parseval's theorem. Math. Z. **34**, 634—636 (1932).

Nachweis dafür, daß eine in der vorstehend referierten Note offengelassene Frage negativ zu beantworten ist.

R. Schmidt (Kiel).

Zygmund, A.: On a theorem of Privaloff. *Studia Math.* (Lwów) **3**, 239—247 (1931).

En généralisant un théorème de M. L. Fejér sur les séries trigonométriques conjuguées [*J. f. reine u. angew. Math.* **144** (1913)] M. J. Privaloff a montré [*Rec. Soc. Math. Moscou* **32**, 357—363 (1925), en russe avec un résumé en français] que, si

1° une série trigonométrique $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ est bornée dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ et si 2° elle converge dans un ensemble E de mesure positive, la série conjuguée $\sum_1^\infty (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ converge presque partout dans E . —

L'auteur généralise encore ce dernier résultat en remplaçant l'hypothèse 2° par la suivante: les sommes partielles $s_n(\theta)$ de la série $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$

satisfont dans $[0, 2\pi]$ à l'inégalité $s_n(\theta) > g(\theta)$, où $g(\theta)$ est une fonction intégrable L . La démonstration est appuyée sur deux formules concernant les polynômes trigonométriques, l'une due à M. F. Riesz [*C. R.* **158**, 1657—1661 (1914)] et l'autre à M. G. Szegő [*Schriften der Königsberger gelehrten Gesellschaft, Naturwiss. Klasse* **5**, 59 bis 70 (1928)].

F. Leja (Warszawa).

Vignaux, J. C.: Über die Verallgemeinerung eines Borelschen Lemmas. (*Dep. de Mat., Univ., La Plata.*) *Contrib. Estud. Ci. fís. y mat.* **5**, ser. mat. 323—329 u. franz. Zusammenfassung 324 (1931) [Spanisch].

L'auteur appelle fonction associée d'ordre ν de la série $\sum U_n$, la fonction U_ν , $U_\nu(x) = \sum U_n \frac{x^{n\nu}}{(n\nu)!}$ si celle-ci est holomorphe pour $x \geq 0$. (Si $\nu = 1$ on a la fonction associée de M. Borel.) L'auteur démontre le théorème suivant: $U_\nu(x)$, $V_\nu(x)$ et $W_\nu(x)$ désignant respectivement les fonctions associées de $\sum U_n$, $\sum v_n$ et $\sum \omega_n$ où $\omega_n = u_0 v_n + \dots + u_n v_0$, on a

$$\int_0^x W_\nu(t) dt = \int_0^x U_\nu(t) V_\nu(x-t) dt.$$

La démonstration est semblable à celle employée par M. Borel pour le cas $\nu = 1$.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Vignaux, J. C.: Über absolut summierbare Reihen nach einer verallgemeinerten Borelschen Methode. (*Dep. de Mat., Univ., La Plata.*) *Contrib. Estud. Ci. fís. y mat.* **5**, ser. mat. 277—289 u. franz. Zusammenfassung 278 (1931) [Spanisch].

$\sum U_n$ est dite sommable (B, ν) lorsque $n = \int_0^\infty e^{-x} U_\nu(x) dx$ converge (pour la signification de $U_\nu(n)$ voir l'analyse précédente). Cette série est dite absolument sommable (B, ν) lorsque les intégrales $\int_0^\infty e^{-x} |U_\nu^{(m\nu)}(x)| dx$ convergent ($m = 0, 1, \dots$). Si $\sum U_n$, $\sum V_n$ sont respectivement absolument sommables (B, p) et (B, q) , $\sum \omega_n$ ($\omega_n = u_0 v_n + \dots + u_n v_0$) est absolument sommable (B, ν) où $\nu = \max(p, q)$ et $\omega = uv$. Si $p = q = 1$ on a un théorème connu de M. Borel.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Sagastume Berra, Alberto E.: Über den Parallelismus zwischen Reihen und Integralen. (*Dep. de Mat., Univ., La Plata.*) *Contrib. Estud. Ci. fís. y mat.* **5**, ser. mat. 291—303 u. franz. Zusammenfassung 292 (1931) [Spanisch].

Übertragung bekannter Sätze über das Laplacesche Integral: $\int_0^\infty \varphi(t) e^{-xt} dt$ auf das allgemeinere Integral: $\int_0^\infty \varphi(t) e^{-x\lambda(t)} dt$, wobei $\lambda(t)$ eine positive, monoton wachsende und differenzierbare Funktion sei. Einfacher wäre es, dieses Integral durch eine Transformation auf das Laplacesche zurückzuführen. *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

Sagastume Berra, Alberto E.: Die Summationsmethode von Riesz, auf die Dirichletschen Integrale angewandt. (*Dep. de Mat., Univ., La Plata.*) Contrib. Estud. Ci. fís. y mat. 5, ser. mat. 305—322 u. franz. Zusammenfassung 306 (1931) [Spanisch]. Anwendung der Summation durch typische Mittel auf Integrale, insbesondere

auf das „Dirichletsche“ Integral: $\int_0^{\infty} e^{-\lambda(t)} u(t) dt$. Im wesentlichen enthalten in dem Buche von G. H. Hardy und M. Riesz: The general theory of Dirichlet's series 1915, insbesondere S. 23—30. *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

Durañona y Vedia, Agustín: Über die Hölderschen Mittelwerte von Zahlenfolgen. (*Dep. de Mat., Univ., La Plata.*) Contrib. Estud. Ci. fís. y mat. 5, ser. mat. 339—347 u. franz. Zusammenfassung 340 (1931) [Spanisch].

L'auteur donne des relations liant les convergences (au sens ordinaire et au sens d'Abel) des différentes suites h_n^r , $K_n^r = h_n^{r-1} - h_n^r$ où

$$h_n^0 = s_n, \quad h_n^{r+1} = \frac{h_n^r + \dots + h_n^r}{n+1}$$

où s_n est une suite donnée.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Prasad, B. N.: Sur la sommabilité de la série conjuguée d'une série de Fourier. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1385—1387 (1931).

Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Konjugierte der Fourierschen Reihe einer L -integrierbaren Funktion $(C, 1)$ -summierbar ist, und zwar mit einem Summenwert, der mit dem Wert der früher vom Verf. eingeführten verallgemeinerten konjugierten Funktion $G(x)$ (dies. Zbl. 3, 111) übereinstimmt. Ferner eine hinreichende Bedingung für das Entsprechende bei A -Summierbarkeit. *R. Schmidt* (Kiel).

Prasad, Ganesh: On the summation of infinite series of Legendre's functions. II. Bull. Calcutta Math. Soc. 23, 115—124 (1931).

Die Reihe

$$P_{-\frac{1}{2}}(x) + \frac{1}{2} P_{\frac{1}{2}}(x) \cdot r + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P_{\frac{3}{2}}(x) \cdot r^2 + \dots$$

für $x = \cosh \sigma$ und eine Anzahl ähnlich gebildeter Reihen werden ausgewertet.

R. Schmidt (Kiel).

Shabde, N. G.: On the summation of infinite series of Legendre's functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 23, 155—182 (1931).

Den 10 Auswertungen der vorstehend referierten Note von Prasad werden 26 weitere hinzugefügt.

R. Schmidt (Kiel).

Selzer, S.: Ein Satz über die Summation nicht konvergenter Reihen. Bol. mat. (Baidaff) 4, 106—108 (1931) [Spanisch].

Si $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum S_n x^n = s$, alors $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} x^n = s$. On pose: $S_n^{(k)} = \sum_{i=1}^n S_i^{(k-1)}$, $S_n^0 = S_n$. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand)

Ananda-Rau, K.: On a Tauberian theorem concerning Dirichlet's series with positive coefficients. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 310—312 (1931).

Der Satz: „Es sei $a_n \geq 0$, $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq 0$ und $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s \lambda_n}$ konvergent für $s > 0$. Aus

$$f(s) \sim \frac{A}{s^\alpha} L\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow 0,$$

wo

$$L(u) = (\lg u)^{\alpha_1} (\lg \lg u)^{\alpha_2} \dots, \quad A > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \alpha_n \geq 0,$$

folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu \sim \frac{A \lambda_n^\alpha L(\lambda_\nu)}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

welcher von Hardy und Littlewood [Mess. of Math. 43, 141—146 (1914)] unter der

Bedingung $\lambda_{n+1} \propto \lambda_n$ bewiesen worden ist, wird vom Verf. auf den Spezialfall $\lambda_n = n$ zurückgeführt, was in einfacher Weise durch Benützung der Ungleichung

$$F(s) < f(s) < e^s F(s),$$

wo

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ns} \quad \text{und} \quad c_n = \sum_{n-1 \leq \lambda_\nu < n} a_\nu$$

ist, geschieht.

Karamata (Beograd).

Théodoresco, M. N.: La dérivée aréolaire et ses applications à la physique mathématique. Paris: Diss. 1931. 105 S.

Es sei $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ (auch nichtanalytisch) in \mathfrak{B} definiert, γ eine geschlossene Kurve in \mathfrak{B} , D der Flächeninhalt des Inneren von γ . Wir betrachten die Größe

$$\frac{1}{2iD} \int_{\gamma} f(z) dz$$

und ziehen γ irgendwie auf $z_0 = x_0 + iy_0$ zusammen: wenn sie einem Grenzwert $\varphi(z_0)$ zustrebt, so nennen wir diesen die Flächenableitung $Df/D\omega$ von $f(z)$. Im Anschluß an Ansätze von D. Pompeiu [Rend. Circ. mat. Palermo **33** (1912); **35** (1913)] werden Funktionen mit einer Flächenableitung $\varphi(z)$ in allen Punkten von \mathfrak{B} betrachtet; sie werden „monogen (α)“ genannt, und insbesondere „holomorph (α)“, wenn $\varphi(z)$ stetig ist. Als Spezialfall ergeben sich die analytischen Funktionen, die durch $Df/D\omega \equiv 0$ charakterisiert sind und gewissermaßen die Rolle von Konstanten spielen. Wenn P und Q differenzierbar sind, ist

$$\frac{Df}{D\omega} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right].$$

Aus der Greenschen Formel ergibt sich für diese Funktionen das folgende Analogon zur Cauchyschen Randdarstellung:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{Df}{v-\zeta} d\omega.$$

Man beweist diese Formel auch im allgemeinen Falle, indem man aus dem Satz von Morera ableitet, daß das zweite Glied rechts, um $f(\zeta)$ vermehrt, eine reguläre Funktion darstellt. — Die rechte Seite stellt bei beliebig vorgegebenen Werten $Df/D\omega$ und Randwerten $f(z)$, wenn ζ in G liegt, eine holomorphe (α) Funktion f dar; wenn ζ außerhalb von G liegt, eine reguläre Funktion; für den Fall, daß ζ auf C liegt, werden langwierigere Untersuchungen durchgeführt. Für beliebige stetige $f(z)$ und $\varphi(z)$ folgt daraus: wenn man weiß, daß $\varphi(z)$ überall, mit Ausnahme einer abzählbaren Menge (oder im Falle einer Lipschitz-Bedingung für $f(z)$, auch mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null), die Flächenableitung von $f(z)$ ist, so ist es überall. — Es werden weiter die Funktionen bestimmt, deren n -te Flächenableitung verschwindet, die in der Theorie die Rolle von Polynomen spielen; ferner ergeben sich Reihenentwicklungen, für Funktionen, die Flächenableitungen aller Ordnungen besitzen. Eine gleichmäßig konvergente Reihe von holomorphen (α) Funktionen „darf“ man gliedweise differenzieren, wenn die neue Reihe ebenfalls gleichmäßig konvergiert. (Es sei bemerkt, daß im Text dieser Satz irrtümlich formuliert und der Beweis entsprechend abzuändern ist. Für die Folgerungen ist das jedoch belanglos.) Die Begriffe werden schließlich verallgemeinert im Sinne der Theorie der reellen Funktionen (Mengenfunktionen). — Im zweiten Teil werden einige Anwendungen gebracht. Zunächst werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $\varphi(v)$ gefunden, daß $g(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\varphi(v)}{v-\zeta} d\omega$

partielle Ableitungen nach ξ und η ($\zeta = \xi + i\eta$) besitzt. $g(\zeta)$ ist eine Lösung des Systems

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 2\Re(\varphi), \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 2\Im(\varphi).$$

Daher gelingt es, Lösungen des Systems zu finden, die gewissen Randbedingungen genügen. Es werden noch die einfachsten Analoga zu linearen Differentialgleichungen betrachtet und einige Beispiele für Anwendungen auf spezielle Probleme aus der Mechanik der Kontinua gegeben.

Willy Feller (Kiel).

Differentialgleichungen:

Fukuhara, Masuo: Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires. III. (*Math. Inst., Univ., Sapporo.*) Proc. imp. Acad. (Tokyo) 7, 298—299 (1931).

L'auteur s'occupe de certains résultats de Mlle Charpentier sur les points singuliers de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, et en donne une extension aux systèmes de n équations. Un point (dans l'espace à $n + 1$ dimensions) est dit semi-singulier de mesure positive lorsque des courbes intégrales partant de ce point couvrent un ensemble de mesure positive, ce qui a lieu d'ailleurs toujours pour tous les points semi-singuliers (singuliers d'un côté au moins) dans le cas $n = 1$. Il est prouvé: si l'unicité de la solution est assurée en chaque point au moins du côté droit, alors 1° l'ensemble des points semi-singuliers de mesure positive est au plus dénombrable, 2° toute courbe, lieu des points semi-singuliers de mesure positive, est une courbe intégrale. La démonstration de la dernière propriété est appuyée sur le théorème suivant de la théorie des ensembles prouvé par M. Sierpinski [*Tohōkū Math. J.* 13, 300 (1918)]: un continu borné ne peut pas être décomposé en un nombre fini ou dénombrable d'ensembles fermés et disjoints. (Vgl. dies. Zbl. 2, 339.)

S. Saks (z. Z. in Cambridge, Mass.).

Okamura, Hiroshi: Sur l'approximation successive et l'unicité de la solution de

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. A 14, 85—96 (1931).

$f(x, y)$ sera une fonction finie dans le domaine $D[0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq c]$ ($a, b, c > 0$) et elle sera une fonction continue de y , x étant fixe, et une fonction mesurable de x , y étant fixe. De plus on aura: $|f(x, y)| \leq M(x)$, où $M(x)$ est une fonction sommable dans $(0, a)$. Si $y(x)$ est une fonction mesurable dans $(0, a)$ et l'on $d - b \leq y(x) \leq c$, $f(x, y(x))$ est sommable dans $(0, a)$, d'après un théorème de M. Carathéodory. L'auteur montre que la méthode des approximations successives

peut être utilisée pour prouver que l'équation: $y(x) = \int_0^x f(x, y(x)) dx$ possède une

solution sous des conditions plus larges que celles de M. Carathéodory (Vorlesungen über reelle Funktionen. 2^e Éd.) et de M. Rosenblatt [*Ark. Math.* 5, 2 (1909)]. En outre il dérive d'une même inégalité plusieurs conditions pour l'unicité de la solution, e. a. celles de Carathéodory et Rosenblatt. J. Ridder (Groningen).

Burgatti, Pietro: Sull'equazione $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$ e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di $y_n(x) = 0$. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat., II. s. 1, 165—172 (1932).

Der Verf. knüpft an Untersuchungen von Laguerre an; er erwähnt unter Hinweis auf die Stelle: Werke 1, 133ff., daß dort Kennzeichen angegeben sind, die Aussagen über die Frage liefern, ob eine Gleichung $y_n(x) = 0$, worin $y_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades bedeutet, das einer linearhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, lauter reelle Wurzeln hat oder nicht. Es wird ein elementarer Beweis für ein solches gegeben. Das Kennzeichen von Laguerre liefert aber auch bei Beschränkung auf die in der Überschrift genannte besondere Gleichungsform nicht in allen Fällen eine bestimmte Aussage. Der Verf. stellt folgenden Satz auf: Es werde $a_1b_0 - a_0b_1 = \delta$ gesetzt und lineare Invariante genannt; dann hat für eine Polynomlösung $y_n(x)$ der genannten Differentialgleichung die Gleichung $y_n(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln, wenn δ positiv ist und wenn δ zwar negativ, aber absolut kleiner als a_1^2 ist. Sie hat dagegen mindestens ein Paar komplexer Wurzeln, wenn δ negativ und absolut größer als a_1^2 ist. Die erste Aussage folgt sogleich aus dem Kennzeichen von Laguerre. Die Aussage

über die komplexen Wurzeln folgt aus einer Rekursionsformel für die Polynome $y_n(x)$. Der Beweis der Aussage an zweiter Stelle bereitet große Schwierigkeiten, die der Verf. nicht besiegen konnte. Er zweifelt jedoch nicht an der Richtigkeit der Aussage, die er in den Fällen $n = 2, 3, 4$ unmittelbar bestätigen konnte. *L. Schrutka* (Wien).

Püschel, Werner: Die erste Randwertaufgabe der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Raum für beliebige Gebiete. *Math. Z.* **34**, 535—553 (1932).

In zahlreichen Arbeiten der letzten Zeit wurde die Frage geklärt, inwieweit bei der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie im Raume die Lösung (unter „Lösung“ eine geeignete Erweiterung des klassischen Begriffes verstanden) die vorgegebenen Randwerte auch wirklich annimmt. Die vorliegende Arbeit überträgt die in dieser Hinsicht für $\Delta u = 0$ erhaltenen Ergebnisse auf die allgemeine selbstadjungierte elliptische Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a(x_1, x_2, x_3) u + b(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

Es zeigt sich, daß man im wesentlichen mit denselben Begriffsbildungen und Methoden auskommt, die auch im Falle der Potentialgleichung zum Ziel führen. *Rellich*.

Montel, Paul: Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles. *J. de Math.*, IX. s. **10**, 415—438 (1931).

Gibt die rechnerischen Beweise der in C. R. **192**, 1694—1696 angekündigten Resultate über lineare Abhängigkeiten von Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen (vgl. dies. Zbl. **2**, 26). Unter den Anwendungen findet man z. B. die folgende hübsche Bemerkung über Potentialfunktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$: Wenn $\log r_1 = \log \sqrt{(u - a_1)^2 + (v - b_1)^2}$ und $\log r_2 = \log \sqrt{(u - a_2)^2 + (v - b_2)^2}$ harmonisch in x, y sind ($a_1, b_1 \neq a_2, b_2$), so sind u und v oder u und $-v$ konjugiert harmonisch.

Hans Lewy (Göttingen).

Devisme, Jacques: Sur quelques équations aux dérivées partielles. *C. R. Acad. Sci. Paris* **193**, 1154—1156 (1931).

Einige Resultate über die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_3 U = U_{xxx} + U_{yyy} + U_{zzz} - 3U_{xyz} = 0.$$

Die allgemeinste Transformation $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$, die die Bedingung

$$dX^3 + dY^3 + dZ^3 - 3dXdYdZ = \lambda(x, y, z)(dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dxdydz)$$

erfüllt, genügt einem einfachen System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Wird durch eine solche Transformation $U(x, y, z)$ in die Funktion $V(X, Y, Z)$ übergeführt, so gilt

$$\Delta_3 V = \frac{1}{\lambda(x, y, z)} \Delta_3 U,$$

so daß also insbesondere mit $\Delta_3 U$ auch $\Delta_3 V$ verschwindet. Die offenbare Analogie zu der Bedeutung der konformen Transformationen in der Ebene für die Potentialgleichung wird durch Angabe weiterer — zum Teil bekannter — Eigenschaften ergänzt.

Lüneburg (Göttingen).

Goursat, Édouard: Sur quelques équations de Monge intégrables explicitement. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. e mat.*, II. s. **1**, 35—59 (1932).

Zugrundegelegt wird ein System (Σ) von $n - 1$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den n unabhängigen Veränderlichen x, x_1, \dots, x_{n-1} und einer gesuchten Funktion x_n , nämlich

$$q_i = F_i(x, x_1, \dots, x_n; q), \quad q = \frac{\partial x_n}{\partial x}, \quad q_i = \frac{\partial x_n}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

das der Involutionsbedingung

$$\frac{\partial F_i}{\partial q} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x} + q \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \right) - \frac{\partial F_k}{\partial q} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} + q \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + F_k \frac{\partial F_i}{\partial x_n} - F_i \frac{\partial F_k}{\partial x_n} = 0$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n-1)$$

genügt. Die durch $x_1 = \varphi_1(x)$, $x_2 = \varphi_2(x)$, \dots , $x_n = \varphi_n(x)$ gegebene eindimensionale Mannigfaltigkeit M_1 heißt eine singuläre Mannigfaltigkeit, wenn die Gleichung

$$F(q) = q + F_1 p_1 + \dots + F_{n-1} p_{n-1} - p_n = 0 \quad \left(p_i = \frac{d\varphi_i}{dx}, i = 1, 2, \dots, n \right)$$

— aufgefaßt als Gleichung für q — eine Doppelwurzel hat. Durch Elimination von q aus $F(q) = 0$ und $dF(q)/dq = 0$ erhält man die Mongesche Gleichung

$$\Phi(x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

Die Frage der Integration dieser Gleichung wird eingehend studiert. Ferner wird die Aufgabe behandelt, umgekehrt zu einer Mongeschen Gleichung $\Phi = 0$ ein Involutions-system (Σ) zu finden. Schließlich werden beide Fragestellungen erweitert auf den Fall, daß die Gleichung $F(q) = 0$ eine r -fache Nullstelle besitzt. *Rellick* (Göttingen).

Pfeiffer, Ju.: Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui sont homogènes par rapport aux dérivées et ne contiennent pas la fonction inconnue. Zap. fiz.-mat. Vidd. Vseukrain. Akad. Nauk Kyivi 5, 69—78 u. franz. Zusammenfassung 78 (1931) [Ukrainisch].

Hat die in den Ableitungen homogene Gleichung

$$f\left(x_0, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1} \middle/ \frac{\partial z}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \middle/ \frac{\partial z}{\partial x_0}\right) = 0 \quad (1)$$

das vollständige Integral mit additiven Konstanten

$$z = \bar{\Phi}(x_0, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_n) + c, \quad (2)$$

$$\frac{D(\Phi_0 \dots \Phi_{k-1} \Phi_{k+1} \dots \Phi_n)}{D(c_1 \dots c_n)} \equiv 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

dann gibt es einen oder mehrere Werte i , für welche auch

$$z = c_0 \bar{\Phi}(x_0, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_{i-1}, d, c_{i+1}, \dots, c_n) + c \quad (d \text{ bestimmt})$$

ein vollständiges Integral wird. — Zugleich mit (2) wird auch

$$z = b_0 \omega(x_0, x_1, \dots, x_n; b_1, \dots, b_{n-1})$$

$$\frac{D\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}, \dots, \frac{\omega_{g-1}}{\omega_0}, \frac{\omega_{g+1}}{\omega_0}, \dots, \frac{\omega_n}{\omega_0}\right)}{D(b_1 b_2 \dots b_{n-1})} \equiv 0$$

vollständig. Verf. nennt es das Integral von Mayer. Bedingungen der Möglichkeit des Überganges von einem zum anderen sind 1., daß die Beziehungen zwischen den Konstanten c_i und b_i die Form haben

$$c_i \psi_i(b_0 b_1 \dots b_{n-1}), \frac{D(c_1 \dots c_n)}{D(b_0 \dots b_{n-1})} \equiv 0,$$

$$c = b + \psi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}).$$

2. die einzige Lösung des Systems

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial c_k} S_k = \Phi_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

habe eine bestimmte Form (nämlich Verhältnis zweier Determinanten). Die Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten müssen bei gewissen Φ die Form haben ($\Phi = -b_0 \omega(x_0, \dots, x_n, b_1, \dots, b_{n-1}) - \Psi(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$). *Sintzov* (Charkow).

Pfeiffer, Ju.: Sur la première transformation de Jacobi. Zap. fiz.-mat. Vidd. Vseukrain. Akad. Nauk Kyivi 5, 79—89 u. franz. Zusammenfassung 89 (1931) [Ukrainisch].

Der Verf. stellt den Zusammenhang zwischen den Bedingungen auf, daß die Inte-

grale der Gleichung $f(x_1, \dots, x_n, z_1, p_1, \dots, p_n) = 0$ und ihrer durch die erste Substitution von Jacobi transformierten, nämlich

$$u(z, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n \frac{\partial u}{\partial z} \neq 0,$$

$$f\left(x_1, \dots, x_n, z, -\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, -\frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

vollständige Integrale seien.

D. Sintzov (Charkow).

Pleiffer, Ju.: Über die Lieschen Integrale. Zap. fiz.-mat. Vidd. Vseukrain. Akad. Nauk Kyivi 5, 91–97 u. dtsh. Zusammenfassung 97 (1931) [Ukrainisch].

Eine Beziehung $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \varphi_{q+1}) = 0$, wo Φ eine willkürliche Funktion der in bezug auf x_1, \dots, x_n unabhängigen Funktionen

$$\varphi_i \equiv \varphi_i(x_1, \dots, x_n, z_1, c_1, \dots, c_n) \quad i = 1, 2, \dots, q + 1$$

ist (c_1, \dots, c_n willkürliche Konstanten), ist als Liesches Integral zu betrachten, wenn es im System der Funktionen φ_i s wesentliche Parameter $b_2 = \omega_1(c_1, \dots, c_n)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) gibt und $s < n - q$. Wenn in den Gruppen der Ausdrücke

$$\left[\frac{D\left(\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial c_{i_1}}, \dots, \frac{\partial \varphi_{\lambda_\nu}}{\partial c_{i_\nu}}\right)}{D(x_0, x_1, \dots, x_q, x_{r_1}, \dots, x_{r_\nu})} \right]$$

für $\nu = \varrho + 1, \varrho + 2, \dots, h - 1, h$ keiner von Null verschieden ist und für $\nu \leq \varrho$ in jeder Gruppe von Null verschiedene vorkommen, dann führt die Elimination von Φ und der wesentlichen Parameter zu einem vollständigen System partieller Differentialgleichungen. Für $\varrho = h$ gibt es keine überzähligen Konstanten. *D. Sintzov (Charkow).*

Humbert, Pierre: Sur l'équation $\Delta_3^p U = 0$. Ann. Soc. sci. Bruxelles A 51, 91–93 (1931).

Es werden gewisse explizite Aussagen gemacht über die Lösungen der Differentialgleichung.

$$\Delta_3^p U = \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{\partial^3}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \right)^p U = 0,$$

die deshalb besonders leicht zu behandeln ist, weil sie durch die Koordinatentransformation $u = x + y + z$, $w = x + jy + j^2 z$, $v = x + j^2 y + jz$ ($j^3 = 1$) in die Differentialgleichung $\frac{\partial^p u}{\partial^p u \partial^p v \partial^p w} = 0$ übergeführt werden kann. *Rellich (Göttingen).*

Nicolesco, Miron: Sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques d'ordre p . C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1152–1154 (1931).

$\mu(\varrho)$ sei der Mittelwert einer Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$, gebildet über eine n -dimensionale Kugelfläche um den Punkt P vom Radius ϱ . Gibt es zu jedem Punkt P eines Gebietes D einen Radius ϱ_P derart, daß für jedes kleinere ϱ die Ungleichung $u(P) \leq \mu(\varrho)$ besteht, so heißt u in D „unterharmonisch 1. Ordnung“. Diese Definition wird durch Angabe einer allgemeineren Ungleichung zu dem Begriff der „unterharmonischen Funktion p -ter Ordnung“ verallgemeinert und der Satz aufgestellt, daß diese Funktionen stets auch die Ungleichung $(-1)^p \Delta_p u \leq 0$ erfüllen. Außerdem werden einige Bemerkungen über die Mittelwerte einer Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$, gebildet über einen n -dimensionalen Kreiszyylinder, formuliert. *Lüneburg (Göttingen).*

Funktionentheorie:

Krafft, Maximilian: Der Satz von der Gebietstreue. J. f. Math. 167, 388–389 (1932).

Der Satz, daß eine analytische Funktion $w = z + c_2 z^2 + \dots$ in einer Umgebung von $z = 0$ alle Werte einer passenden Umgebung von $w = 0$ annimmt, wird üblicherweise mit Hilfe des Rouchéschen Satzes bewiesen. Verf. gibt einen Beweis, der mit den Mitteln der Potenzreihenlehre auskommt. Die Gleichung $z = w - c_2 z^2 - \dots$ wird mit der Iterationsmethode für genügend kleine $|w|$ gelöst. Wegen der gleichmäßigen

Konvergenz des Verfahrens ergibt sich zugleich der analytische Charakter der Umkehrungsfunktion. Ein Beweis, der sich auf einfache Sätze über Potenzreihen stützt, findet sich übrigens in der 2. Auflage von Landaus Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, S. 98—99. *W. Fenchel* (Göttingen).

● **Ostrowski, Alexander:** Studien über den Schottkyschen Satz. Basel: B. Wepf & Cie. 1931. 111 S. Frs. 5.—.

Die Untersuchungen betreffen vor allem quantitative Verschärfung des Schottkyschen Satzes und stehen zum Teil in nahem Zusammenhang mit den Arbeiten von Julia, an die sich ja schon eine frühere höchst beachtenswerte Arbeit des Verf. (Math. Z. 24) anschloß, und mit den Arbeiten von Milloux und Valiron. — Die Arbeit geht aus von der quantitativen Fassung des Schottkyschen Satzes, in der zunächst Verallgemeinerungen nach zwei Richtungen angebracht werden: Erstens wird die Normierung auf Ausnahmewerte $0, 1, \infty$ aufgehoben, also allgemeiner a, b, ∞ als Ausnahmewerte in die Voraussetzungen aufgenommen. Dies erweist sich als keineswegs trivial, sondern bietet wesentliche Vorteile, wie hier gezeigt wird. Zweitens werden an Stelle von Kreis und konzentrischem Teilkreis allgemeinere Konfigurationen zugrunde gelegt; im gleichen Sinne erfahren die Hadamard-Borelschen Ungleichungen Verallgemeinerung. Neben diesem ersten Kapitel ist auch das vierte (letzte) etwas anhangsweise dem Schottkyschen Satze selbst gewidmet; seine Absicht ist auf Nachweis möglichst günstiger numerischer Schranken in der Fassung des Satzes gerichtet, woran sich einige Anwendungen schließen. — Das zweite Kapitel führt die eingangs genannten Untersuchungen des Verf. zur Theorie der Normalfamilien in größere Tiefen. Bezeichne Ω einen Kreis um einen Punkt ζ , σ , eine gegen ∞ strebende Folge komplexer Zahlen, so werden die Punkte ζ nach dem Verhalten der Funktion $f(z)$ in den Kreisen σ, Ω bzw. der durch $f(z)$ erzeugten Funktionenfamilie $f(\sigma, z)$ im Kreise Ω in Julia-Punkte von fünf Arten eingeteilt, sofern die Familie in Ω nicht normal ist. Es ergeben sich mannigfache Beziehungen zwischen diesen Arten von Julia-Punkten, die durch an sich schöne Beispiele belegt werden und wichtige Einblicke in die Struktur normaler Funktionenfamilien bzw. ihrer Ausnahmefolgen gestatten. — Das dritte Kapitel ist der Untersuchung von Funktionen gewidmet, die in der Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität neben ∞ noch einen Wert ganz auslassen; es ist das Ziel, möglichst genaue untere Schranken für die Anzahl der Stellen zu gewinnen, wo ein gewisser Wert angenommen wird, z. B. für die 1-Stellen von Funktionen $\vartheta^{(2)}$. Hierbei spielt natürlich eine Fassung des Schottkyschen Satzes für Kreisinge an Stelle von Kreisen eine Rolle. Ein wichtiges Hilfsmittel (übrigens auch schon vorher) ist die Abbildung eines Kreisinges auf einen Parallelstreifen, welche es gestattet, Abschätzungen zu vereinfachen und zu verschärfen, bei denen von analytischer Fortsetzung Gebrauch zu machen ist; dieser Gedanke geht auf Lindelöf zurück und ist später auch von Koebe und in etwas anderem Zusammenhang im Grenzfalle von Carleman benutzt worden. Übrigens werden in diesem Kapitel mehrere Methoden auf dieselbe Aufgabe angewandt, besonders um ihre Tragweiten gegeneinander abzuwägen. Die Ergebnisse der Hauptmethode gehen erheblich über die bisher bekannten schärfsten Abschätzungen hinaus. — Endlich muß noch der umfangreichen Einleitung des Werkes gedacht werden, deren Lektüre schon für sich genüßvoll ist. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

Cartwright, M. L.: On integral functions of integral order. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 209—224 (1931).

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion der endlichen Ordnung ρ und z_1, z_2, \dots die Stellen in der x -Ebene, wo sie den Wert z annimmt. Es wird das Konvergenzverhalten (nicht nur absolut) der unendlichen Reihen $\sum z_n^{-\rho}$ untersucht. Ergebnisse Lindelöfs können in gewisser Richtung verschärft werden. *Ulrich* (Marburg, Lahn).

Visser, C.: Sur la dérivée angulaire. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1388—1389 (1931).

Soient $z = x + iy$ et $w(z) = u + iv$ holomorphe pour $x > 0$, avec $u > 0$. On suppose encore que $w(z)$ donne la représentation conforme simple de $x > 0$ sur un

domaine G qui contient l'axe $v = 0$, $u > u_0 \geq 0$ et que $w \rightarrow \infty$ si $z \rightarrow \infty$. On sait que $w(z):z$ et $w'(z)$ tendent vers λ ($0 \leq \lambda < \infty$) si $z \rightarrow \infty$ dans tout angle $|y:x| < M$ (Wolff). λ est la dérivée angulaire de Carathéodory. Carathéodory, Valiron et Ahlfors ont donné des conditions pour que $\lambda > 0$. L'auteur en donne une autre. Il utilise la transformation $Z = \frac{z - z_0}{z + z_0}$, $W = W(Z) = \frac{w(z) - w(z_0)}{w(z) + w(z_0)}$ et remarque que $|W(Z):Z|$ a un minimum positif dans $|Z| < 1$. En repassant à $w(z)$ et faisant tendre z vers z_0 , il s'ensuit que

$$|w'(z_0)| \geq \mu(w_0) \frac{u_0}{x_0} \quad (1)$$

$\mu(w_0)$ désignant le minimum de $|w - w_0|:|w + \bar{w}_0|$ quand w parcourt la frontière de G . En passant à la fonction inverse, $z = z(w)$ de $w(z)$ et en prenant w réel, $w = u$, (1) donne une inégalité différentielle facile à intégrer et fournit ce résultat: Si l'inté-

grale $\int \left(\frac{1}{\mu(u)} - 1 \right) \frac{du}{u}$ converge, $\frac{z(u)}{u}$ reste borné. Il en résulte, dit l'auteur, que $\lambda > 0$. En fait on en déduit d'abord que $w(z):z$ reste supérieur à un nombre positif sur un certain chemin allant à l'infini et les théorèmes de Lindelöf conduisent à la conclusion. — L'élégant résultat de Visser, obtenu par une méthode très simple, contient mon th. VI (Bull. Sci. math. 53) et se rapproche de celui d'Ahlfors [Acta Soc. sci. fennicae 1, Nr 9, 36 (1930)].

G. Valiron (Paris).

Whittaker, J. M.: A property of integral functions of finite order. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 252—258 (1931).

Beweis eines Satzes über ganze Funktionen aus dem Wiman'schen Ideenkreis:

Sei $f(z)$ eine ganze Funktion von der Ordnung ρ und $\sigma < 1 - \frac{\rho}{2}$. Dann gibt es eine Folge von Kreisen $|z - \zeta_\nu| \leq |\zeta_\nu|^\sigma$ mit $\zeta_\nu \rightarrow \infty$, in denen der Maximalmodul M_ν und der Minimalmodul m_ν der Bedingung $\log m_\nu > h \log M_\nu$ mit konstantem $h > 0$ genügen.

Ahlfors (Paris).

Ullrich, Egon: Über den Einfluß der Verzweigkeit einer Algebroiden auf ihre Wertverteilung. J. f. Math. 167, 198—220 (1932).

Diese Arbeit, von der eine Voranzeige schon referiert wurde (dies. Zbl. 1, 147), gibt eine vorzügliche Darstellung des heutigen Standes der Theorie der algebroiden Funktionen. Die zentrale Stellung ist der zweiseitigen Hauptungleichung

$$\sum_1^q m\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(\log r T(r)) \leq T(r, f) \leq N(r, f) + m(r, f) + O(\log r T(r))$$

gegeben, aus der durch Weglassung des Mittelgliedes der zweite Hauptsatz folgt. Dazu kommt der Verzweigungssatz des Verf.: $N_x(r) \leq 2(k-1)T(r, f) + O(1)$, die durch Betrachtung der Diskriminante der k -deutigen, algebroiden Funktion gewonnen wird. $N_x(r)$ ist eine Größe, welche die Verzweigung der Riemannschen Fläche X der Algebroiden mißt; sie bezieht sich also nicht auf eine spezielle, auf X gegebene Funktion. Nach dem Verzweigungssatz gibt es auf X keine Algebroiden, deren charakteristische Funktion langsamer wächst als $N_x(r)$, und die Wahrscheinlichkeit — wenn diese Redeweise gestattet wird —, daß die relative Verzweigungsdichte

$$\xi = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_x(r)}{T(r, f)}$$

> 0 ausfällt, ist klein. — Mit Hilfe der Hauptungleichung und des Verzweigungssatzes folgt leicht die Defektrelation

$$\sum \delta(z_\nu) + \sum \mu(z_\nu) \leq 2 + \xi,$$

wobei $0 \leq \xi \leq 2k - 2$. Der allgemeine Fall ist also der, wo die Defektsumme höchstens 2 ist. Mit Hilfe der von Nevanlinna angegebenen meromorphen Funktionen

mit vorgeschriebenen, rationalen Defekten konstruiert der Verf. algebroide Funktionen, für welche ξ einen beliebigen rationalen Wert zwischen 0 und $2k-2$ annimmt. Im letzten Abschnitt werden die vom Verf. herrührenden Resultate über die Ableitungsfestigkeit der Ausnahmewerte meromorpher Funktionen auf algebroide Funktionen übertragen.

Ahlfors (Paris).

Segre, Beniamino: Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse. Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7, 86—87 (1931).

Segre, B.: Intorno al problema di Poincaré della rappresentazione pseudoconforme. Atti Accad. naz. Lincei, VI. s. 13, 676—683 (1931).

In der ersten Abhandlung (Rendic. del Sem. Mat. della R. Univ. di Roma 1931) hat Verf. gezeigt, daß auf jeder analytischen 3-dim. Hyperfläche im Raume zweier komplexen Variablen zwei Kurvenscharen, die sog. Bicharakteristiken, gefunden werden können, die mit der Hyperfläche invariant (bezgl. der pseudokonformen Abbildungen) verknüpft sind; ferner, daß zwei Hyperflächen S und S' dann und nur dann pseudokonform aufeinander abgebildet werden können, wenn deren Bicharakteristiken durch eine Punkttransformation von S auf S' ineinander übergeführt werden können. Aus diesem Grunde ist die Invariantentheorie einer Hyperfläche bezgl. der pseudokonformen Abbildungen vollständig gleichwertig mit der Invariantentheorie zweier Kurvenscharen im 3-dimensionalen Raum bezgl. der Gruppe der topologischen Transformationen. Da diese ihrerseits leicht auf die von Tresse seit langem erledigte Invariantentheorie der Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = w(x, y, y')$ gegenüber Punkttransformationen zurückgeführt werden kann, so sind damit auch die Fragen der pseudokonformen Abbildungen von 3-dimensionalen Flächen (unter Voraussetzung der Analytizität sowohl der Flächen wie der Abbildungen) zumindest theoretisch erledigt. Diese Resultate sind übrigens nicht neu, sie finden sich in etwas anderer Form bereits angedeutet bei Blaschke, Jber. d. D. Mathem. Ver. 38, 204 bis 206 (1929).

Kähler (Rom).

Segre, Beniamino: Questioni geometriche legate colla teoria delle funzioni di due variabili complesse. Boll. Un. mat. ital. 10, 269—274 (1931).

Nach einigen einführenden geometrischen Bemerkungen über die „charakteristischen Flächen“ (Nullgebilde einer analytischen Funktion) und die Hyperplanoide (Hyperflächen $\varphi = 0$, auf denen der Levische Differentialausdruck $L(\varphi)$ verschwindet) wird das folgende Lemma angegeben: Schneidet man die Menge der singulären Stellen einer eindeutigen analytischen Funktion mit irgendeinem Hyperplanoid, so erhält man stets eine in sich dichte Punktmenge. — Daraus lassen sich dann ohne Rechnung eine Reihe bekannter Sätze (von Hartogs und Levi) über die Singularitätengebilde analytischer Funktionen herleiten.

Kähler (Rom).

Severi, Francesco: Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche. Mem. Accad. Ital. Roma, Cl. Sci. fis. ecc. 2, Mat.: Nr 1, 1—27 (1931).

Dans la 1^{ère} partie de ce travail, l'auteur pose le problème de Dirichlet généralisé: étant donné, dans l'espace de 2 variables complexes x et y ($x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$), un domaine Γ homéomorphe à une hypersphère, limité par une surface régulière Δ , à quelles conditions une fonction réelle u , définie et continue sur Δ , est-elle la trace d'une fonction $U(x_1, x_2, y_1, y_2)$ biharmonique dans Γ ? [fonction biharmonique = partie réelle d'une $F(x, y)$ holomorphe]. Si U existe, U est évidemment unique, puisque U est en particulier harmonique. — Dans la 2^e partie, l'auteur donne une solution du probl. de Dir. généralisé, dans le cas particulier où Γ est un dicylindre ($|x| < 1$, $|y| < 1$); il n'avait pas encore pris connaissance de la solution de Nikliborc [C. R. 180, 1008 (1925)]. Enfin, dans la 3^e partie, l'auteur démontre à nouveau quelques résultats classiques de la théorie de la représentation conforme à 2 var. complexes, avec des hypothèses plus restrictives que celles faites habituellement.

Henri Cartan (Strasbourg).

Severi, Francesco: Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche. Mem. Accad. Ital. Roma, Cl. Sci. fis. ecc. **2**, Mat.: Nr 5, 1—59 (1931).

Ce mémoire fait suite au précédent (les notations de l'analyse ci-dessus sont conservées); l'auteur l'a lui-même résumé dans une Note aux Comptes Rendus [192, 1514 (1931); Zbl. **2**, 38]. L'auteur s'y occupe du problème de Dirichlet généralisé et en donne plusieurs solutions. On en trouvera une solution définitive dans un mémoire ultérieur du même auteur [Atti Accad. naz. Lincei, VI, **13**, 795—804 (1931); le Zbl. en a déjà publié une analyse (**2**, 342); cette analyse sera désignée plus loin par [a]]. — Le mémoire que nous devons analyser présentement contient les principaux résultats suivants: 1° Etant donnée une fonction u continue sur Δ , il existe $U(x_1, x_2, y_1, y_2)$ harmonique à l'intérieur de Γ et qui tend vers u sur la frontière Δ ; en écrivant que U , qui est donnée par une intégrale connue, est biharmonique, on obtient 3 éq. intégrodifférentielles pour u . — 2° Si on suppose en outre que Δ est analytique, que tous ses points sont simples [a], et que u est analytique [a], le probl. de Dirichlet se pose ainsi: à quelles conditions existe-t-il une $U(x_1, x_2, y_1, y_2)$ biharmonique dans Γ et sur Δ , et se réduisant sur Δ à une fonct. anal. u donnée? L'auteur montre que u doit satisfaire à 2 éq. aux dérivées partielles du 3^e ordre et une équation intégrodifférentielle [il se sert pour cela du lemme suivant: pour que U , harmonique dans Γ et sur Δ , soit biharmonique, il faut et il suffit que

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_2 - \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_1$$

soit, sur Δ , une différentielle exacte]. En fait, l'éq. intégrodiff. est superflue [voir [a]; la méthode analysée dans [a] consiste à résoudre d'abord un probl. local, puis le probl. global; ajoutons que la première solution du probl. local est due à Wirtinger, Math. Ann. **97**, 357 bis 375 (1927); voir p. 369—370]. — 3° L'auteur résout le probl. local dans le cas exceptionnel où l'hypersurf. considérée est un morceau d'hyperplanoïde H (hyperplanoïde = lieu de surf. caractéristiques dépendant analytiquement d'un paramètre réel; c'est aussi le lieu des points où s'annule une fonct. biharm.). Pour que u analytique sur H soit la trace d'une U biharm., il faut et il suffit que u satisfasse à une éq. du 2^d ordre, et U dépend alors d'une fonction arbitraire d'une variable; par ex., si H a pour équation $x_2 = 0$, $u(x_1, y_1, y_2)$ doit satisfaire à $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$. On peut se donner arbitrairement les valeurs de u sur une surface fermée (à 2 dim. réelles) tracée sur H . L'auteur donne aussi des indications sur la solution du probl. de Dir. (global) pour un domaine limité par des morceaux d'hyperplanoïdes en nombre fini. — 4° Le mémoire se termine par un théorème d'unicité: un domaine Γ étant donné, soit L un arc analytique (à 1 dim. réelle), situé dans Γ ou sur la frontière de Γ , et tel que toute $F(x, y)$, holomorphe dans Γ , qui s'annule sur L , soit identiquement nulle; alors, si toutes les dérivées partielles du 1^{er} ordre de deux fonct. U et V , biharm. dans Γ , sont respect. égales sur L , on a $U - V = \text{const.}$ dans Γ . Henri Cartan (Strasbourg).

Maier, Wilhelm: Orthogonale Systeme elliptischer Funktionen. Math. Z. **34**, 487 bis 504 (1932).

Der Verf. setzt hier seine früher [Crelles Journal **164** (1931) u. Math. Ann. **104** (1931); dies. Zbl. **1**, 282 bzw. 399] begonnenen Untersuchungen fort, deren Zweck ist, die Theorie der elliptischen Funktionen auf die Kroneckersche s -Funktion zu begründen. Sind ω_1, ω_2, x, y und u den Bedingungen

$$0 < |\omega_1|, \quad 0 < \left| I \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right|, \quad \omega_1 y - \omega_2 x \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}, \quad u \not\equiv 0 \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

genügende komplexe Größen, so wird die s -Funktion eindeutig durch die folgenden Eigenschaften definiert: Es soll für jedes zulässige u die Funktion $s(u)$ regulär sein, ferner die Grenzbedingung $\lim_{u \rightarrow 0} u s(u) = 1$ gelten und schließlich im Großen

$$s(u) = e^{2\pi i x} s(u + \omega_1) = e^{2\pi i y} s(u + \omega_2)$$

sein. Auf Grund dieser Eigenschaften werden für die betreffende Funktion lineare Funktionalgleichungen und Reihendarstellungen, ferner ein quadratisches Additionstheorem sowie Formeln hergeleitet, welche den Zusammenhang mit den Jacobischen ϑ -Funktionen vermitteln. Wesentlich neu ist die Bildung orthogonaler Systeme elliptischer Funktionen, welche gestatten, analytische Funktionen nach elliptischen Funktionen zu entwickeln. Myrberg (Helsinki).

Rademacher, Hans: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. f. Math. 167, 312—336 (1932).

Gegenstand der Untersuchung bildet die für $\Im(\tau) > 0$ durch das Produkt

$$\eta(\tau) = e^{12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau})$$

definierte Funktion, welche in der Dedekindschen Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine zentrale Stellung einnimmt. Der eigentliche Zweck der Arbeit ist, gewisse in der Entwicklung von $\log \eta(\tau)$ vorkommende arithmetische Ausdrücke zu studieren und insbesondere die zwischen denselben herrschenden Relationen, welche Dedekind auf funktionentheoretischem Wege gefunden hat, rein arithmetisch zu begründen. Es handelt sich hauptsächlich um die Relation

$$12S(h, \kappa) + 12S(\kappa, h) = -3 + \frac{h}{\kappa} + \frac{\kappa}{h} + \frac{1}{h\kappa},$$

$$S(h, \kappa) = \sum_{\mu=1}^{\kappa-1} \left(\left(\frac{\mu}{\kappa} \right) \right) \left(\left(\frac{h\mu}{\kappa} \right) \right); \quad ((u)) = u - [u] - \frac{1}{2}.$$

In den funktionentheoretischen Betrachtungen werden als Hilfsmittel die aus der Theorie der Gammafunktion bekannte Mellinsche Formel sowie die Hurwitzsche durch die Reihe

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^z} \quad (0 < a \leq 1)$$

definierte ζ -Funktion angewandt. Die erreichten arithmetischen Resultate führen auf die Funktion $\log \frac{\eta(n\tau)}{\eta(\tau)}$ angewandt zur Erklärung der Beschaffenheit der Perioden gewisser zur betreffenden Kongruenzgruppe gehöriger Integrale dritter Gattung.

Myrberg (Helsinki).

Hecke, E.: Die Riemannschen Periodenrelationen für die elliptischen Modulfunktionen. J. f. Math. 167, 337—345 (1932).

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die Abelschen Integrale solcher algebraischer Gebilde zu untersuchen, welche den elliptischen Modulfunktionen N -ter Stufe ($N \geq 6$) zugeordnet sind und insbesondere die für solche Gebilde gültigen Riemannschen Bilinearrelationen zwischen den Integralperioden von der Seite der Modulfunktionen her zu begründen. Es wird zu diesem Zweck zuerst näher auf die allgemeine Bestimmung der erzeugenden Substitutionen einer beliebigen Untergruppe \mathfrak{U} der Modulgruppe $\Gamma(1)$ eingegangen. Ist $\Gamma(1) = \mathfrak{U} \cdot M_1 + \mathfrak{U} \cdot M_2 + \dots$ die Zerlegung von $\Gamma(1)$ in Nebengruppen nach \mathfrak{U} , wobei M_1, M_2, M_3, \dots Repräsentanten der verschiedenen Nebengruppen bezeichnen, so gibt es für die beiden Erzeugenden von $\Gamma(1)$, nämlich $U(\tau' = \tau + 1)$ und $T(\tau' = -\frac{1}{\tau})$ Elemente S_n und L_n aus \mathfrak{U} derart, daß

$$M_h \cdot U = S_h \cdot M_{f(h)}, \quad M_h \cdot T = L_h \cdot M_{g(h)}. \quad (h = 1, 2, \dots)$$

Es kann dann bewiesen werden, daß die L_h, S_h ein volles System von Erzeugenden für die Untergruppe \mathfrak{U} bilden. Bei der Herleitung der Bilinearrelationen beschränkt sich der Verf. auf solche Integrale, deren singuläre Punkte den rationalen Eckpunkten der Modulgruppe entsprechen. Zur Verwertung des bilinearen Ausdruckes

$$B(j, \varphi) = \sum_{h=1}^{\mu} \int_{\gamma} j(M_h \tau) d\varphi(M_h \tau),$$

wo $j(\tau)$ ein Integral erster oder zweiter Gattung und $\varphi(\tau)$ ein Integral erster oder zweiter oder dritter Gattung ist und wo γ die die beiden auf dem Rand des Fundamentalbereiches von $\Gamma(1)$ liegenden Punkte τ_0 und $\tau_0 + 1$ verbindende Strecke bezeichnet, wird der Wert des Ausdruckes einerseits durch die Entwicklungskoeffizienten

der Integrale im Punkte $\tau = \infty$, andererseits durch die Perioden der Integrale dargestellt. Durch Vergleichung der beiden Darstellungen wird die gesuchte Bilinearrelation gefunden. Zum Schluß wird noch auf eine dritte, auf die Methoden der algebraischen Gruppentheorie beruhende Auswertung des fraglichen Ausdrucks eingegangen.

Myrberg (Helsinki).

Geometrie.

Bieberbach, Ludwig: Zur Lehre von den kubischen Konstruktionen. *J. f. Math.* 167, 142—146 (1932).

Es wird gezeigt, daß man alle kubischen Konstruktionen lösen kann, wenn man neben dem üblichen Gebrauch von Zirkel und Lineal noch folgende Verwendung des Rechtwinkelhakens gestattet: Er ist so hinzulegen, daß sein einer Schenkel durch einen gegebenen Punkt O geht, daß sein anderer Schenkel einen gegebenen Kreis — Mittelpunkt A , Radius r — berührt, sein Scheitel aber auf einer gegebenen Geraden — durch A_0 mit dem Einheitsvektor v — liegt, wo er den neu zu konstruierenden Punkt S markiert. — Sind in bezug auf O die Punkte A und A_0 durch die Vektoren a und a_0 gegeben, so gehört zu S der Vektor $a_0 + xv$, worin x sich durch die Gleichung

$$[(a - a_0 - xv)(a_0 + xv)]^2 = r^2 (a_0 + xv)^2 \quad (1)$$

bestimmt. Sie läßt sich durch die Voraussetzung $a = 2a_0$, $a_0^2 = r^2 = 1$ in die kubische Gleichung der Winkeldrittung umformen und liefert für diese Konstruktion eine Lösung mit dem Rechtwinkelhaken. Eine andere Voraussetzung über a , a_0 , r führt zu einer Gestalt der Gleichung (1), die nach weiteren Umformungen eine Konstruktion der Kubikwurzelausziehung mit Hilfe des Rechtwinkelhakens lehrt. Da aber durch Zirkel und Lineal die Lösung einer jeden Gleichung dritten Grades auf die genannten beiden Konstruktionen zurückgeführt werden kann, ist der Beweis erbracht. Auf Grund eines bekannten Satzes von Steiner kann auch auf den Gebrauch des Zirkels verzichtet werden, wenn eine Kreisperipherie (ohne Mittelpunkt) gezeichnet vorliegt.

W. Ludwig (Dresden).

Järnefelt, Gustaf: Zur synthetischen Axiomatik der Gauss'schen Geometrie auf einer allgemeinen regulären Fläche. *Ann. Acad. Sci. fenn. A* 34, Nr 2, 1—21 (1931).

Für ein System von Punkten und Geraden wird folgendes Axiomensystem postuliert: Die Axiome der Verknüpfung für die Gerade, die Axiome der Anordnung, der Strecken- und Winkelkongruenz aus Hilberts „Grundlagen“, ferner das Dedekindsche Stetigkeitspostulat und einige Ungleichungen über die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, insbesondere ein Analogon zu Hilberts Axiom III 5. Aus diesem Axiom werden einige Sätze über Dreiecke und Vierecke abgeleitet, die im „Unendlichkleinen“ in bekannte Sätze der ebenen Elementargeometrie übergehen. Ferner wird abgeleitet, daß das Bogenelement in der vorliegenden Geometrie durch eine quadratische Differentialform dargestellt wird: $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$, wo u, v Polarkoordinaten sind. — Die durch die angegebenen Axiome charakterisierte Geometrie findet sich z. B. realisiert durch die Punkte und geodätischen Linien auf einer regulären Fläche in der Umgebung eines regulären Punktes innerhalb eines nirgends konkaven Gebietes F , sofern die Funktion $G(u, v)$ der Bedingung genügt, daß überall auf F für \sqrt{G}/u und $\partial\sqrt{G}/\partial u$ eine untere positive Schranke existiert, und daß in jedem geodätischen Dreieck auf F die 6 Ausdrücke $\frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$ usw. nach unten beschränkt sind.

Ruth Moufang (Rom).

Mehmke, R.: Über ein Gegenstück zum Eulerschen Satz vom ebenen Dreieck und zu dessen Verwandten im Raum und in höheren Räumen in der hyperbolischen Geometrie. *Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abh.* 10, 1—7 (1931).

Zu dem Satz von Euler, daß Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks in einer Geraden liegen, wird unter vorteilhafter Benutzung

der Grassmannschen Punktrechnung ein Analogon für die ebene hyperbolische Geometrie bewiesen, indem der Höhenschnittpunkt des Dreiecks der euklidischen Ebene durch den gemeinsamen Punkt dreier geeigneter Abstandslinien in der hyperbolischen Ebene ersetzt wird. Ein entsprechendes Theorem wird auch für den n -dimensionalen hyperbolischen Raum abgeleitet.

Ruth Moufang (Rom).

Watanabe, Sigekatu: Sur les formes spatiales de Clifford-Klein. Jap. J. Math. 8, 65—102 (1931).

Ausführliche Studie der Bewegungsgruppen des n -dimensionalen sphärischen Raumes S_n . Im ersten Teil der Arbeit werden kontinuierliche abelsche Gruppen im S_n betrachtet. Cliffordsche Mannigfaltigkeit C_r heißt die Menge aller Bildpunkte eines Punktes bei Anwendung einer derartigen r -parametrischen Gruppe. Für einen Punkt allgemeiner Lage ist C_r r -dimensional, und der S_n wird von den C_r einfach und lückenlos bedeckt. Für gewisse Punkte artet deren C_r in eine Gerade, eine „Achse“ der übrigen C_r , aus. Jede Bewegung einer solchen Gruppe läßt sich nämlich als Produkt von Drehungen um r paarweise polare Achsen auffassen, und da die Gruppe abelsch ist, müssen alle Elemente das gleiche Achsensystem haben. Im S_3 spezialisiert sich das auf die bekannten 2parametrischen Schraubungsgruppen, die eine 1parametrische Schar Cliffordscher koaxialer Flächen in sich überführen, im euklidischen Raum erhält man koaxiale Rotationszylinder. Im S_n gibt es nicht mehr als $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ paarweise polare

Geraden, und das ist daher die größtmögliche Dimensionszahl einer C_r . Wie die eigentlichen Cliffordschen Flächen C_2 sind auch die C_r einerseits von r koaxialen Kreisscharen, andererseits von r Scharen „paralleler“ Geraden bedeckt. Die innere Geometrie einer C_r ist stets euklidisch, und sowohl die Kreise als auch die Geraden sind geodätische Linien. Im großen vereinfacht sich die Struktur der C_r dadurch, daß Verf., wie erwähnt, nicht den elliptischen, sondern den sphärischen Raum zugrunde legt. Daher stellt sich jede r -dimensionale C_r als Hyperquader mit identifizierten Gegenhyperflächen bzw. als Produkt von r Kreisen dar und ist orientierbar. — Im zweiten Teil werden Fundamentalgruppen des S_n , d. h. solche diskontinuierliche Bewegungsgruppen betrachtet, deren Elemente außer der Identität sämtlich fixpunktfrei sind. Den Fundamentalbereich einer solchen Gruppe mit der von der Gruppenäquivalenz bestimmten Randzuordnung nennt Verf. eine Clifford-Kleinsche Raumform. Nur in Räumen ungerader Dimensionszahl existieren nichttriviale Fundamentalgruppen. Sind sie abelsch, so sind sie zyklisch. Für diese bemerkenswerte Tatsache wird ein Beispiel genau diskutiert. Die zu einer Abelschen Fundamentalgruppe gehörige Raumform ist stets mit dem S_n homöomorph; Verf. gibt dafür einen eleganten Beweis. Zum Schluß werden einige nichtabelsche Fundamentalgruppen untersucht, deren Zentrum Z nicht nur aus der Identität besteht. Dann bestimmt Z ein koaxiales System von Mannigfaltigkeiten C_r , und die Faktorgruppe nach Z ist isomorph einer Permutationsgruppe jener Achsen. Die Raumform einer nichtabelschen Fundamentalgruppe kann von S_n verschieden sein.

Cohn-Vossen (Köln).

● **Schilling, Friedrich:** Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1931. IV, 70 S., 1 Taf. u. 63 Abb. RM. 3.—.

An Hand der allgemein bekannten Abbildung der pseudosphärischen Fläche auf die euklidische Ebene gibt der Verf. eine überraschend einfache und klare Beschreibung der Grundsätze der hyperbolischen Geometrie der Ebene. Laut dieser Abbildung werden die Hauptarten der Bewegungen in der hyperbolischen Ebene erklärt, die der Verf. als Pseudobewegungen bezeichnet und auf Grund derer er auch die dazugehörigen Hauptsätze aufbaut, welche die hyperbolische Geometrie von der euklidischen unterscheiden. Es handelt sich hier nämlich um die Winkelsumme des Dreiecks, die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie, alsdann um die Entwicklung der Eigenschaften der Kreise, die Parallelentheorie und schließlich um die Elemente der Inhaltslehre in der hyperbolischen Geometrie. Durch Übertragung der Pseudobewegungen von

der Abbildungsebene auf die Pseudosphäre gelangt der Verf. zur Feststellung der Hauptarten der Bewegungen auf der Pseudosphäre und schildert dann die Haupteigenschaften der geodätischen Linien dieser Fläche. Ganz besonders hervorzuheben wären dabei: 1. die neue und sehr einfache Methode der Aufstellung der Projektion der geodätischen Linien auf die zu der Achse der Fläche senkrecht stehende Ebene, falls die Abbildung derselben gegeben ist, und 2. das dazugehörige Modell, welches durch große Anschaulichkeit gekennzeichnet ist. Das Buch stellt mit bemerkenswerter Klarheit die Beziehung der hyperbolischen Geometrie der Ebene mit der Geometrie auf der Pseudosphäre ganz analog der Beziehung zwischen der elliptischen und der sphärischen Geometrie auf. *Nil Glagoleff (Moskau).*

● Kommerell, V., und K. Kommerell: *Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. I. Krümmung der Raumkurven und Flächen. 4. Aufl. (Göschens Lehrbücherei. 1. Gruppe. Reine u. angew. Math. Bd. 20.)* Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1931. 221 S. u. 38 Abb. geb. RM. 10.—.

● Kommerell, V., und K. Kommerell: *Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. II. Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. 4. Aufl. (Göschens Lehrbücherei. 1. Gruppe. Reine u. angew. Math. Bd. 21.)* Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1931. 210 S. u. 22 Abb. geb. RM. 10.—.

Vierte Auflage des früher in der Sammlung Schubert erschienenen Werkes. Im einzelnen ist stark geändert worden. Die Abgrenzung des Stoffes ist aber im wesentlichen dieselbe geblieben. Dem Inhalt nach und auch in der Wahl der Bezeichnungen schließt sich das Buch enger an die klassische Literatur an als die anderen neueren Lehrbücher der Differentialgeometrie. Es wird ausschließlich die Differentialgeometrie „im Kleinen“ behandelt. Um funktionentheoretischen Schwierigkeiten zu entgehen, werden die Kurven, Flächen usw. analytisch vorausgesetzt. Ein großer Teil der Sätze wird durch anschauliche Überlegungen gewonnen. Inhalt: 1. Abschnitt des I. Bandes: Theorie der Raumkurven und der mit ihnen verknüpften abwickelbaren Flächen. (Frenetsche Formeln; natürliche Gleichungen; Bestimmung von Kurven, mit gewissen vorgegebenen Relationen zwischen Krümmung und Windung; durch die Ebenen des begleitenden Dreikants erzeugte Torsen; Evoluten; Evolventen; Abriß der Theorie der Minimalkurven.) 2. Abschnitt, 1. Kap.: Allgemeine Krümmungstheorie der Flächen. (Die beiden Fundamentalformen; Hauptkrümmungen; Indikatrix; Krümmungs-, Asymptoten-, konjugierte Richtungen; Formeln von Rodrigues und Weingarten für die Ableitungen des Normalenvektors; Formeln von Gauss für die zweiten Ableitungen des Flächenvektors. Sphärische Abbildung. Zentralflächen. Minimallinien einer Fläche und isometrische [isotherme] Parameter.) 2. Kap.: Abbildungen zweier Flächen aufeinander. (Charakterisierung der konformen, flächentreuen, isometrischen Abbildungen. Herstellung aller konformen Abbildungen mit Hilfe der isometrischen Parameter. Flächentreue Abbildung einer Rotationsfläche auf die Ebene. Flächenverbiegung; Theorema egregium; Abwicklung der Torsen in die Ebene; Verbiegung von Schrauben- in Rotationsflächen.) 3. Kap.: Kurven auf einer Fläche. (Geodätische Linien; geodätische Koordinaten; geodätische Kegelschnitte; Liouvillesche Flächen. Speziellere Sätze über Krümmungs-, Asymptoten- und geodätische Linien. Definition und Biegungsinvarianz der geodätischen Krümmung; Beweis der Gauss-Bonnetschen Formel [in der 4. Auflage hinzugekommen].) Der II. Band beginnt (1. Kap.) mit einer Ableitung der Mainardi-Codazzischen Formeln und der Bestimmung einer Fläche aus den beiden Fundamentalformen. (Dieser Paragraph verdient bei Neuauflage besondere Aufmerksamkeit. Eindeutigkeits- und Existenzfragen sind ein wenig durcheinander geraten.) Als Anwendung werden Flächen mit gewissen gegebenen Eigenschaften bestimmt. Beltramische Differentialparameter mit Anwendungen auf die Untersuchung von Flächenkurven und Verbiegung. Als 2. Kapitel ist eine Darstellung der Parallelverschiebung von Levi-Civita und ihrer Beziehung zu Totalkrümmung und geodätischer Krümmung hinzugekommen. Die folgenden Kapitel des 1. Abschnittes enthalten eine ausführliche Behandlung der Weingartenschen Flächen (bei denen eine Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen besteht), der Minimalflächen, der Flächen konstanter Krümmung und ihrer Beziehungen zur nichteuklidischen Geometrie, der Regelflächen und einiges über dreifach orthogonale Flächenscharen, konforme Abbildung des Raumes und Dupinsche Zykliken. Der 2. Abschnitt bringt die Theorie der Strahlenkongruenzen im wesentlichen im Anschluß an Kummer. Der Band schließt mit einer den Stoff beider Bände umfassenden Sammlung von Übungsaufgaben. *Fenchel (Göttingen).*

Green, H. G., and L. E. Prior: *A note on the circular cubic regarded as the envelope of families of circles.* Amer. Math. Monthly 39, 16—18 (1932).

Morley, Frank, and W. K. Morrill: *Tritangent circles of the rational bicubic.* Amer. J. Math. 54, 185—189 (1932).

Kapferer, H.: Über die Jacobische Kurve eines Systems von drei Kurven und den Begriff „Abhängigkeit“ bei homogenen Polynomen. *Math. Z.* **34**, 554—567 (1932).

Mit Hilfe der vom Verf. früher (Sitzgsber. Heidelb. Akad. 1927) aufgestellten charakteristischen Eigenschaften der Schnittpunktmultiplizität (f, g) der ebenen Kurven $f = 0$, $g = 0$ in einem Punkt π werden folgende Sätze über die Funktionsdeterminante J dreier ternärer Formen f, g, S bewiesen: I. Sei S irreduzibel, $fg \not\equiv 0 (S)$, m und n die Gerade von f und g , weiter $(m, n) = d$ und $m = \mu d$; $n = \nu d$. Jeder Schnittpunkt von $fg = 0$ mit $S = 0$ sei einfacher Punkt von S . Behauptung: $J \equiv 0 (S)$ dann und nur dann, wenn

$$f' \equiv \text{Const} \cdot g'' \pmod{S}.$$

Spezialfall: f, g, h seien Formen gleichen Grades, von denen eine doppelpunktfrei. Dann folgt aus der algebraischen Abhängigkeit (oder dem Verschwinden der Funktionaldeterminante) die lineare Abhängigkeit. — II. Sei S irreduzibel, $fg \not\equiv 0 (S)$. Der Punkt π sei Schnittpunkt von $fg = 0$ mit $S = 0$ und einfacher Punkt von S . Im Punkt π sei

$$(f, S):(g, S) \neq m:n.$$

Dann gilt

$$\text{a) } J \not\equiv 0 \pmod{S},$$

$$\text{b) } (J, S) = (f, S) + (g, S) - 1.$$

III. Ist dagegen unter sonst gleichen Voraussetzungen $(f, S):(g, S) = m:n$ und $J \not\equiv 0 (S)$, so gilt:

$$(J, S) \geq (f, S) + (g, S).$$

van der Waerden (Leipzig).

Privitera, Jole: Complessi di cubiche gobbe che ricoprono semplicemente l' S_4 . *Atti Accad. Gioenia Catania* **18**, mem. VIII, 1—8 (1931).

Drei ∞^3 Systeme von Raumkurven 3. Ordnung in einem vierdimensionalen Raume. Die zwei ersten bestehen aus kubischen Raumkurven, die in den Hyperebenen durch eine gegebene Ebene enthalten sind. Das letzte besteht aus den veränderlichen Schnittkurven von je drei Hyperflächen 2. Ordnung aus einem besonderen ∞^3 linearen System: Dieses ist das allgemeinste ∞^3 Linearsystem, das im ∞^4 Linearsystem aller Hyperflächen 2. Ordnung enthalten ist, die durch eine gegebene elliptische C^5 hindurchgehen. In jedem Falle geht durch einen Punkt allgemeiner Lage des Raumes S_4 eine einzige C^3 des Systems hindurch.

E. G. Togliatti (Genova).

Milne, William P.: A special type of quintic symmetroid. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **33**, 165—176 (1931).

Herr L. Roth [*Proc. Camb. Phil. Soc.* **25**, 268—271 (1929); *Proc. London Math. Soc.*, II. **30**, 118—126, 425—432 (1930)] hat die geometrischen Eigenschaften der Fläche 5. Ordnung Γ entwickelt, welche der Ort der Punkte $P(x, y, z, t)$ des dreidimensionalen Raumes ist, für die

$$\Sigma \equiv xX + yY + zZ + tT = 0, \quad (1)$$

— unter X, Y, Z, T vier linear unabhängige Hyperquadriken im vierdimensionalen Raume verstanden — ein Hyperkegel ist. — Im ersten Teil betrachtet Verf. den Fall, worin das lineare System (1) ein Paar Hyperebenen enthält; im zweiten Teil den Fall, worin diese Hyperebenen vierfache Berührungsebenen der Basiskurve C des linearen Systemes (1) sind. Verf. betrachtet den Γ einhüllenden Kegel, dessen Spitze im dreifachen Punkte D liegt, der dem Paare Hyperebenen zugeordnet ist. Dieser Kegel 8. Ordnung besteht im ersten Fall aus zwei Kegeln 4. Ordnung, während im zweiten Fall jeder dieser Kegel wieder aus zwei quadratischen Kegeln zusammengesetzt ist. Im ersten Fall hat Γ außerhalb D 16 Kegelpunkte, im zweiten Fall hat Γ deren 24. Verf. gibt Eigenschaften dieser Punkte, und er betrachtet auch eine interessante Familie von Flächen 4. Ordnung, welche mit Γ eine Berührungskurve 10. Ordnung haben. Auch untersucht er die Jacobische Fläche des Systems (1) und bemerkt, daß Γ zu einer allgemeineren Flächenklasse gehört.

G. Schaake (Groningen).

Yates, Robert C.: The description of a surface of constant curvature. Amer. Math. Monthly 38, 573—574 (1931).

In den Endpunkten $F_1 F_2$ eines Stabes s von der Länge $2c$ seien zwei Stäbe a_1, a_2 der Länge $2a$ ($> 2c$) drehbar in einer durch s gehenden Ebene befestigt. Deren freie Enden $G_1 G_2$ seien durch einen Stab t der Länge $2c$ gelenkig verbunden, so daß die Stäbe a_1, a_2 sich in E überkreuzen. Hält man s fest und bewegt t , so beschreibt E eine Ellipse e mit den Brennpunkten $F_1 F_2$ und der großen Achse $2a$. Nun seien in $F_1 F_2, G_1 G_2$ vier Zahnräder angebracht, deren Ebenen auf a_1 und a_2 senkrecht stehen. Wird dann E über einer ebenen Kurve k geführt und rollt dabei der Gelenkmechanismus auf seinen Zahnrädern in der Ebene von k , so müssen F_1, F_2 dieselben Kurven beschreiben wie bei Abrollung der Ellipse e auf k . Ist k eine Gerade, so ist die Rollkurve m von F_1 der Meridian einer Rotationsfläche konstanter mittlerer Krümmung, des Unduloids. Der Mittelpunkt M von a_1 muß eine Parallelkurve von m im Abstand a beschreiben, also nach einem bekannten differentialgeometrischen Satz den Meridian einer Rotationsfläche konstanter Gaußscher Krümmung. Cohn-Vossen (Köln).

Vitali, Giuseppe: Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano. Boll. Un. mat. ital. 10, 265—269 (1931).

Sei $f(t; u) = f(t; u_1, \dots, u_n)$ die determinierende Punktfunktion (siehe G. Vitali, Geometria nello spazio Hilbertiano, S. 85) einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_n des Hilbertschen Raumes H . Sei f_{rs} die zweite kovariante Ableitung (il secondo ricciano, l. c. S. 201) von f . Eine Beziehung von der Form $\sum_{rs} d^r s f_{rs} = 0$, wo die $d^r s$ nur von u_1, \dots, u_n abhängen, bleibt erhalten, wenn man die Mannigfaltigkeit V_n einer projektiven Transformation des Raumes H unterwirft. In bezug auf proj. Transf. von H wird auf eine in den Annali di Mat. erscheinende Arbeit verwiesen.

Čech (Brno).

Boggio, Tommaso: Teoria vettoriale degli spazi curvi. Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7, 38—63 (1931).

In dieser Arbeit werden einige bekannte Theoreme über Riemannsche Übertragungen in der italienischen Vektorsymbolik [Burali-Forti et Boggio, Espaces courbes, critique de la relativité (S. T. E. N. Torino 1924)] zusammengestellt.

Hlavatý (Prag).

Levi-Civita, T.: Sur les surfaces admettant un réseau triangulaire de lignes parallèles. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1371—1373 (1931).¹

Die orthogonalen Trajektorien einer Schar von geodätischen Kurven sind geodätische Parallelen und umgekehrt; man möchte daher erwarten, daß entsprechende Probleme, die sich auf Netze beziehen, äquivalent seien in dem Sinne, daß ihre Lösungen den gleichen Grad von Allgemeinheit haben und von analytischen Operationen derselben Art abhängen; dem ist aber nicht so. Während z. B. rhombisch-geodätische Netze nur auf den Liouvilleschen Flächen existieren, gibt es rhombische Netze aus geodätischen Parallelen auf jeder Fläche. Ein anderes interessantes Beispiel gibt die vorliegende Note. So schwierig und kompliziert sich die Bestimmung aller $ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$ gestaltet, welchen geodätische Dreiecksnetze zukommen, so überraschend einfach wird die Lösung im Falle der geodätischen Parallelen; es treten zwar auch drei willkürliche Funktionen eines Argumentes auf; aber die Bestimmung der Fundamentalgrößen e, f, g gelingt ohne jede Integration. Führt man die Größen

$$E = g/a, \quad F = -f/a, \quad G = e/a, \quad a = eg - f^2 \quad (1)$$

ein, so sind die Kurven $\varphi(u, v) = \text{const}$ geodätische Parallelen, wenn der erste Differentialparameter

$$A_1 \varphi = E \varphi_u^2 + 2F \varphi_u \varphi_v + G \varphi_v^2 \quad (2)$$

eine Funktion nur von φ ist. Sollen also die Kurven

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad v - u = \text{const} \quad (3)$$

geodätische Parallelen sein, so muß sein:

$$\Delta_1 u = E = U(u), \quad \Delta_1(v) = G = V(v), \quad \Delta_1(v-u) = E + G - 2F = W(v-u), \quad (4)$$

womit bei Beachtung von (1) e, f, g bestimmt sind.

Volk (Würzburg).

Drach, J.: *Remarques au sujet de la note de M. T. Levi-Civita.* C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1374—1375 (1931).

Verlangt man, daß vier Scharen von geodätischen Parallelen auf einer Fläche existieren sollen, soll also insbesondere auf der Fläche ein Möbius-Netz aus 4 geodätischen Parallelen möglich sein, so findet man als eine Möglichkeit für die Fundamentalgrößen:

$$e = a(v^2 + \gamma), \quad f = -a(uv + \beta), \quad g = a(u^2 + \alpha), \quad (a = eg - f^2);$$

damit sind Flächen nichtkonstanter Krümmung bestimmt (im Gegensatz zu den geodätischen Möbius-Netzen, die nur auf Flächen konstanter Krümmung möglich sind [Finsterwalder]); ds^2 stimmt aber bis auf den Faktor a mit dem ds^2 der Flächen konstanter Krümmung überein. Setzt man $\varphi = v + ku$, so kommt:

$$\Delta_1 \varphi = \varphi^2 + \alpha k^2 + 2\beta k + \gamma = \varphi^2 + \omega,$$

somit für

$$d\Theta = d\varphi/\sqrt{\varphi^2 + \omega}, \quad \Theta = \lg(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \omega})$$

$\Delta_1 \Theta = 1$; die geodätischen Linien, die die orthogonalen Trajektorien der Kurven $\varphi = \text{const}$ sind, ergeben sich somit nach Jacobi aus der Gleichung $\partial\Theta/\partial k = l$, wo l , wie k , eine willkürliche Konstante bedeutet. Die Ausrechnung zeigt, daß die Geodätischen in der (u, v) -Ebene sich doppeltberührende Hyperbeln darstellen. Der Fall $e = av$, $f = -a(u + v + \alpha)$, $g = au$, der auf sich doppeltberührende Parabeln führt, ist nicht berücksichtigt. — Zum Schlusse bemerkt der Verf., daß die Betrachtungen Levi-Civitas sich unmittelbar ausdehnen lassen auf den Fall, wo die Tangenten einer Kurve dritter Klasse 3 Scharen von geodätischen Parallelen bilden. Volk (Würzburg).

Segre, Beniamino: *Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili ed alle equazioni differenziali ad esse collegate.* Mem. Accad. Ital. Roma, Cl. Sci. fis. ecc. 2, Mat.: Nr 3, 1—143 (1931).

Eine Geradenkongruenz, die samt ihren Laplace-transformierten W ist, heißt eine R -Kongruenz.* Die ihr auf den Brennflächen entsprechenden Netze heißen R -Netze; die Brennflächen selbst heißen R -Flächen. Jedem R -Netz gehört eine Schar von ∞^1 projektiven Deformationen der es tragenden R -Fläche, bei denen das Netz ein R -Netz bleibt. Die R -Netze hängen von 6 willkürlichen Funktionen ab. In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. verschiedene von willkürlichen Funktionen abhängende Spezialfälle der R -Netze und die zugehörigen projektiven Deformationen. Im ersten einführenden Teil der Arbeit werden die Fundamentalgleichungen einer auf ein konjugiertes Parameternetz bezogenen Fläche des projektiven Raumes aufgestellt; anschließend werden einige bekannte Sätze über W - und R -Kongruenzen bewiesen, die in der Folge benutzt werden. — Im zweiten Teil werden als erster Spezialfall der R -Netze die von zwei willkürlichen Funktionen abhängenden \mathcal{C} -Netze untersucht, deren beide zugehörigen Kongruenzen je eine feste Gerade (a, b) schneiden; es sind die R -Netze, deren beide Laplace-invarianten verschwinden. Die beiden Kurvenscharen eines \mathcal{C} -Netzes bestehen aus je untereinander kollinearen ebenen Kurven. Im Falle inzidenter Achsen a, b sind die \mathcal{C} -Flächen mit den durch Translation einer ebenen Kurve längs einer ebenen Kurve erzeugten Flächen projektiv identisch; der Fall windschiefer Achsen a, b umfaßt u. a. die Rotationsflächen. Es werden einfache geometrische Konstruktionen der \mathcal{C} -Flächen angegeben. Es folgt eine Untersuchung der zugehörigen projektiven Deformationen. Dieselben werden auf das Studium einer gewissen Verwandtschaft (Pseudoaffinität) zwischen zwei ebenen Kurven zurückgeführt. Anschließend werden im 3. Teil durch die Methode der Pseudoaffinität die projektiven Deformationen der Flächen $x^a y^b z^c = 1$, $x^a + y^a + z^a = 1$ sowie des Torus abgeleitet. Im 4. Teil werden die von 4 willkürlichen Funktionen abhängenden Σ -Kongruenzen untersucht; es sind die R -Kongruenzen, deren eine Brennfläche in eine (notwendig gerade) Linie ausartet. Deren Studium ist analytisch gleich demjenigen der von Darboux untersuchten équations harmoniques $\partial^2 z / \partial x \partial y = [\varphi(x+y) - \psi(x-y)]z$. Die Darboux'schen Ergebnisse werden neu abgeleitet und verallgemeinert; es zeigt sich, daß dieselben durch die Theorie der Σ -Flächen geometrisch gedeutet werden können. Es wird die Fubinische F -Transformation der R -Flächen, auf Σ -Flächen spezialisiert, ausführlich studiert, nebst den dazu inversen Φ -Transformationen. Einen wichtigen Sonderfall der Σ -Netze bilden die Σ_n -Netze; das sind die R -Netze, deren Laplacekette sich in beiden Richtungen schließt, so zwar, daß im ganzen n nicht ausgeartete Netze vorliegen. (Die

Σ_1 -Netze sind also mit den \mathcal{C} -Netzen identisch.) Die Σ_n -Flächen können durch $(n-1)$ -malige Wiederholung einer F -Transformation aus \mathcal{C} -Netzen erhalten werden. Einen wichtigen (von 2 willkürlichen Funktionen abhängenden) Sonderfall der Σ_2 -Netze bilden die Σ -Netze, die mit ihrem nicht ausgearteten Laplace-transformierten kollinear sind. Im 5. Teil werden die von 4 willkürlichen Funktionen abhängenden \mathcal{E} -Kongruenzen untersucht; es sind die in einem nicht speziellen linearen Komplex enthaltenen R -Kongruenzen. Die \mathcal{E} -Flächen entsprechen mittels der Lieschen Geradenkugeltransformation den klassischen isothermen Flächen. Einen wichtigen Sonderfall der \mathcal{E} -Flächen bilden die bereits von Wilczynski untersuchten \mathcal{E}^* -Flächen, die durch die Liesche Transformation in Flächen fester mittlerer Krümmung übergehen. Die \mathcal{E}^* -Netze sind die R -Netze, deren beide Tangentenkongruenzen je einem linearen Komplex angehören. Die zugehörige Laplacekette wird durch eine diskontinuierliche Gruppe von projektiven Transformationen in sich übergeführt. Die Gruppe kann insbesondere endlich sein; die Laplacekette ist dann periodisch, wobei die Periode $2p$ gerade ist. Jedes \mathcal{E}^* -Netz kann auf $\varphi(p)$ Weisen (wo φ die Eulersche zahlentheoretische Funktion bedeutet) in ein \mathcal{E}^* -Netz mit $2p$ -gliedrig periodischer Laplacekette übergeführt werden. Im 6. Teil werden zuerst die Ergebnisse des Hn. Borůvka [Bull. Sc. Math. 53 (1929)] über aus Darboux- und Segre-Kurven bestehende R -Netze durch des Verf. Methode neu abgeleitet. Es folgt die Untersuchung derjenigen R -Netze, deren beide Laplace-invarianten einander gleich, jedoch $\neq 0$ sind. Es zeigt sich, daß die betreffenden Netze projektiv-deformierte spezieller D -Netze sind. Die Bestimmung der fraglichen Netze wird nicht vollständig (vgl. S. 137) durchgeführt, und auch in den vom Verf. erledigten Fällen sind die Formeln nicht möglichst einfach. Es liegt dies wohl hauptsächlich daran, daß die Wahl der Unbekannten nicht symmetrisch in bezug auf die beiden Scharen der Netzkurven ist. Das Problem läßt sich mit Hilfe elliptischer Funktionen vollständig lösen, was in einer kürzlich erschienenen Arbeit des Ref. gezeigt wird (vgl. dies. Zbl. 3, 108). Čech (Brno).

Durand, Georges: Sur une généralisation des surfaces convexes. J. de Math., IX. s. 10, 335—414 (1931).

Die betrachtete Verallgemeinerung der Konvexität besteht darin, daß bloß gefordert wird, daß durch jeden Punkt der Fläche eine Kugel mit festem Radius ϱ hindurchgeht, die keine Punkte der Fläche im Inneren enthält. Jede solche Fläche ist Teil der Begrenzung der Vereinigungsmenge E_ϱ aller offenen Vollkugeln mit dem Radius ϱ um die Punkte einer passend gewählten abgeschlossenen Menge E . Es wird daher von einer beliebigen abgeschlossenen Menge E ausgegangen und die ganze Begrenzung F_ϱ des erwähnten Gebietes E_ϱ betrachtet. Ein Punkt von E heißt „Projektion“ eines Punktes M der Begrenzung F_ϱ , wenn sein Abstand von M gleich ϱ ist. Zunächst werden einige Sätze über die Beziehungen der Punkte von F_ϱ zu ihren Projektionen abgeleitet: die Gesamtheit der Projektionen eines Punktes hängt stetig von diesem ab; die Menge der Projektionen einer abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen usw. — Um die Struktur der Begrenzung F_ϱ zu analysieren, werden ihre Punkte in drei Klassen eingeteilt, je nachdem sämtliche Projektionen derselben (α) in einem echten Teilgebiet einer Halbkugel mit dem Radius ϱ , oder (β) nur auf einer Halbkugel schlechthin liegen, oder schließlich (γ) auch das nicht der Fall ist. Alle (γ)-Punkte sind isolierte Punkte von F_ϱ . Wenn der Durchmesser von E kleiner ist als $\varrho\sqrt{2}$, so gibt es nur (α)-Punkte. Alle (α)-Punkte gehören der „äußeren“ Begrenzung von F_ϱ an (d. h. sind Häufungspunkte von Punkten, die nicht der Vereinigungsmenge E_ϱ angehören). Es gibt zu jedem (α)-Punkt eine Umgebung, die durch eine Gleichung der Form $z = f(x, y)$ darstellbar ist, wobei f beschränkte Differenzenquotienten besitzt. Es werden auch einige Fälle angegeben, in denen die Umgebung eines (β)-Punktes durch zwei solche Gleichungen darstellbar ist, doch ist im allgemeinen die Situation sehr verwickelt. — Eine Menge von Punkten der Begrenzung, die je genau eine Projektion besitzen, ist homöomorph der Gesamtheit ihrer Projektionen. Ist die erste Menge ein Kontinuum, so auch die zweite. Der erste Satz gilt entsprechend für die Punkte von F_ϱ mit zwei Projektionen, die auf einer Geraden liegen. Die Projektionen eines Kontinuums solcher Punkte bilden aber ein oder zwei Kontinua. Ein Punkt der ersten Art ist nie Häufungspunkt von Punkten der zweiten Art. Die Punkte von F_ϱ , deren sämtliche Projektionen in einer Ebene (nicht aber auf einer Geraden) liegen, befinden sich auf endlich vielen explizite darstellbaren Flächenstücken. Für besondere Klassen solcher Punkte wird sogar gezeigt, daß sie auf abzählbar vielen

Jordanschen Kurvenbögen liegen. Es gibt höchstens abzählbar viele Punkte, deren Projektionen nicht in einer Ebene liegen. — In allen Punkten mit genau einer Projektion besitzt F_e eine Tangentialebene; in den Punkten, deren Projektionen nicht auf einer Geraden liegen, besitzt F_e sicher keine Tangentialebene. Die Punkte von F_e ohne Tangentialebene bilden eine Menge ohne Flächeninhalt. *Willy Feller (Kiel).*

Topologie:

Smith, P. A.: Properties of group manifolds. (*Dep. of Math., Columbia Univ., New York.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **17**, 674—675 (1931).

In einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit M sei jedem Punktepaar X, Y ein einziger Punkt XY stetig zugeordnet. Für einen festen Punkt E sei $XE = EX = X$. Dann wird bewiesen: 1. Die Fundamentalgruppe Γ von M ist Abelsch (Verallgemeinerung eines Satzes von Schreier). Unter Voraussetzung des Assoziationsgesetzes $(XY)Z = X(YZ)$ gilt weiter: 2. Es gibt eine (einzige) n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit M_1 von M , die im Sinne der obigen Produktbildung eine Gruppe ist. Ist M kompakt, so ist $M_1 = M$. Unter den Folgerungen sei eine hervorgehoben: 3. Eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit N einer n -dimensionalen Gruppe M ist dann eine Untergruppe, wenn $NN = N$ ist. *van der Waerden (Leipzig).*

Reidemeister, Kurt: Über die Automorphismen von Wegegruppen. *J. f. Math.* **167**, 79—87 (1932).

Man kennt die Struktur der Automorphismengruppe freier Gruppen und hat des öfteren versucht, hieraus für die Untersuchung der Automorphismen nichtfreier Gruppen Vorteil zu ziehen. So ist für die Automorphismen der Wegegruppen (Fundamentalguppen) geschlossener Flächen ein Zusammenhang mit denjenigen freier Gruppen bekannt. Dieser wird in der vorliegenden Arbeit erweitert und vertieft. Es wird aus zwei vollständigen Rückkehrschnittsystemen (die nicht durch eine topologische Flächenabbildung aus einander ableitbar zu sein brauchen) ein Automorphismus der zugehörigen freien Gruppe hergeleitet und seine Stellung in der Gruppe aller Automorphismen der freien Gruppe durch eine Beziehung zu den möglichen Formen der definierenden Relation der Mannigfaltigkeit charakterisiert. Die Mannigfaltigkeit wird dabei kombinatorisch definiert, und es werden einfache Elementartransformationen benutzt, durch die die Mannigfaltigkeit, oder Teilkomplexe auf ihr, in elementarverwandte übergeführt werden. Speziell kann man so eine Mannigfaltigkeit mit von Null verschiedenem Geschlecht in eine Normalform bringen, wo nur ein Flächenstück und ein Eckpunkt verwendet wird. Diesen Reduktionsprozeß charakterisiert der Verf. durch Bäume auf dem eindimensionalen Einteilungskomplex der gegebenen und der dazu dualen Mannigfaltigkeit. Die Umsetzung der kombinatorischen Umformungen in gruppentheoretische wird an der schrittweise vollzogenen Änderung dieser Bäume verfolgt und insbesondere so eine Vermittlung zwischen zwei gegebenen Normalformen hergestellt. *J. Nielsen (Kopenhagen).*

Baer, Reinhold, und Helmut Hasse: Zusammenhang und Dimension topologischer Körperräume. *J. f. Math.* **167**, 40—45 (1932).

Verff. definieren einen topologischen Körperraum als einen Körper K , der gleichzeitig ein solcher topologischer Raum ist, daß die Abbildung $x \rightarrow axb + c$ für alle $a, b, c \in K$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ eine topologische Transformation von K in sich ist. Daß sie trotz so geringer Voraussetzung nichttriviale Sätze beweisen können, rührt daher, daß sie sich (außer im einleitenden § 1) auf kommutative bewertete Körper (in etwas allgemeinerem Sinne als üblich) beschränken und daß die Bewertungsbedingung sehr einschneidende Voraussetzungen (Stetigkeit von Produkt und Reziproke und wahrscheinlich Kompaktisierbarkeit) impliziert. Für einen solchen kommutativen bewerteten topologischen Körperraum (den wir im folgenden kurz „Körper“ nennen) beweisen Verff. nun: 1. Falls seine Dimension > 0 ist, so ist er analytisch-isomorph zu einem Teilkörper des Körpers C aller komplexen Zahlen; insbesondere ist die Dimen-

sion also immer ≤ 2 . 2. Ist $\dim(K) = 2$, so ist $K = C$. 3. Ist $\dim(K) = 1$ und ist K im kleinen kompakt, so ist K der Körper R aller reellen Zahlen. Es ist Verf. nicht gelungen, zu beweisen, daß R der einzige eindimensionale Teilkörper von C ist, d. h. also, daß jeder Teilkörper von C , der mindestens eine reelle Zahl nicht enthält, null-dimensional ist. Wohl ist aber der Beweis gelungen, 1. daß ein solcher Körper K kein Kontinuum enthalten kann und 2. daß er null-dimensional ist, sobald er nicht zusammenhängt.

D. van Dantzig (Rijswijk).

Keller, Ott-Heinrich: Die Homöomorphie der kompakten konvexen Mengen im Hilbertschen Raum. *Math. Annalen* **105**, 748–758 (1931).

Beweis des Satzes, daß alle unendlich-dimensionalen kompakten abgeschlossenen konvexen Mengen des Hilbertschen Raumes untereinander homöomorph sind. Somit hat es Sinn, von unendlich-dimensionalen Elementen zu sprechen, indem man darunter gerade die obengenannten Mengen versteht. Allerdings beweist der Verf., daß die Analogie mit den gewöhnlichen endlich-dimensionalen Elementen dadurch stark eingeschränkt wird, daß es für unendlich-dimensionale Elemente kein Analogon der inneren bzw. der Randpunkte gibt: vielmehr kann man mittels einer topologischen Abbildung eines unendlich-dimensionalen Elementes auf sich jeden seiner Punkte in jeden anderen überführen. Daraus folgt die Unmöglichkeit, den Begriff der kompakten unendlich-dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit in befriedigender Weise einzuführen.

P. Alexandroff (Moskau).

Borsuk, Karol, and Stanislaw Ulam: On symmetric products of topological spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, 875–882 (1931).

Ist E ein topologischer Raum, so versteht man unter dem topologischen Produkt $E \times \dots \times E = E^n$ bekanntlich die Menge aller geordneten n -Tupel (x_1, \dots, x_n) von Punkten x_i aus E , wobei, wenn u_i eine Umgebung von x_i ist, die Menge aller (x'_1, \dots, x'_n) mit $x'_i \in u_i$ eine Umgebung von (x_1, \dots, x_n) heißt. Die Verf. nennen die Menge $E(n)$ aller ungeordneten n -Tupel $\{x_1, \dots, x_n\}$ das n -te symmetrische Produkt von E (dabei werden also zwei durch Permutation auseinander hervorgehende n -Tupel als identisch betrachtet). Als Umgebung von $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist die Menge aller $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ mit $\{x'_1, \dots, x'_n\} \subset \sum_{i=1}^n u_i$ und $u_i \cdot \{x'_1, \dots, x'_n\} \neq \emptyset$ für $i = 1, \dots, n$ definiert. Ist

z. B. E die Kreislinie, so ist E^2 die Torusfläche, dagegen $E(2)$ das Möbiussche Band. Die Eigenschaften eines Raumes E , separabel, kompakt, absolutes G_δ , im kleinen zusammenhängend, bogenverknüpft zu sein, übertragen sich auf $E(n)$. Von anderen Eigenschaften ist dies noch offen. Ist I das Intervall $0 \leq x \leq 1$, so ist $I(n)$ eine n -dimensionale, im kleinen zusammenhängende Cantorsche Mannigfaltigkeit, für $n \leq 3$ mit I^n , für $n \geq 4$ mit keiner Teilmenge des R^n homöomorph. *Nöbeling (Wien).*

Rosenthal, Artur: Über Kontinua von endlicher Ordnung. *J. f. Math.* **167**, 270 bis 273 (1932).

Eine Punktmenge M im n -dimensionalen euklidischen Raume R_n heiße von endlicher (bzw. von beschränkter) Relativordnung bezüglich eines Büschels B von Hyperebenen des R_n , wenn M mit jeder Hyperebene von B höchstens endlich viele Punkte gemeinsam hat (bzw. wenn die Anzahl der gemeinsamen Punkte nach oben beschränkt ist). (Hyperebene = Gesamtheit der Punkte, welche durch lineare Verbindung von $n - 1$ linear unabhängigen Punkten entstehen; Büschel von Hyperebenen = Gesamtheit der Hyperebenen, welche durch lineare Verbindung zweier linear unabhängiger Hyperebenen entstehen.) Verf. beweist nun: Jedes Kontinuum C , welches von endlicher Relativordnung ist bezüglich eines gegebenen Büschels B , ist zusammenhängend im kleinen. (Ist ferner C sogar beschränkt, so ist also C eindeutiges stetiges Streckenbild, enthält daher zu zwei Punkten einen sie verbindenden Jordanbogen.) Durch Konstruktion von Beispielen wird ferner gezeigt, daß gewisse Verallgemeinerungen einschlägiger Sätze nicht möglich sind, z. B. daß ein Jordanbogen, welcher von endlicher Relativordnung bezüglich aller Büschel oder aber von beschränk-

ter Relativordnung bezüglich höchstens $n - 1$ Büschel ist, nicht rektifizierbar zu sein braucht, ferner daß ein Jordanbogen, welcher in bezug auf n Büschel von beschränkter Relativordnung ist, nicht notwendig in allen Punkten vordere und hintere Halbtangenten besitzt.

Haupt (Erlangen).

Haupt, Otto: Über Kontinua von endlicher Relativordnung. *J. f. Math.* **167**, 20 bis 39 (1932).

Ein Kontinuum K (d. h. hier eine abgeschlossene, zusammenhängende Menge) des euklidischen R_3 heißt von endlicher Relativordnung bezüglich eines Ebenenbüschels, wenn K mit jeder Büschelebene höchstens endlich viele Punkte gemein hat, abgesehen von den Punkten der Büschelachse. Ein solches Kontinuum ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Summe von höchstens abzählbar vielen Bogen (topologischen Bildern der Strecke), die mit jeder Büschelebene, abgesehen von den Achsenpunkten, höchstens einen Punkt gemein haben und zu je zwei höchstens gemeinsame Endpunkte besitzen. Ist K beschränkt und zur Büschelachse fremd, so läßt sich K darstellen als Summe von höchstens abzählbar vielen Bogen, die zu je zwei höchstens Endpunkte gemein haben.

Nöbeling (Wien).

Klassische Theorie der Elektrizität.

● **Lorentz, H. A.:** Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Leiden. Bd. 5. Die Maxwellsche Theorie (1900—1902). Bearb. v. K. Bremekamp. Übersetzt v. H. Stücklen. Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1931. VII, 199 S. u. 26 Abb. RM. 15.—

Der vorliegende fünfte Band der von seinen Schülern herausgegebenen Vorlesungen von H. A. Lorentz über theoretische Physik behandelt die klassische Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Die vorbildlich klare Darstellung der allgemeinen Theorie, die durch die Anwendung auf Beispiele von praktischer Bedeutung noch an Verständlichkeit gewinnt, läßt das Buch als Lehrbuch für Anfänger besonders geeignet erscheinen. Der Inhalt gliedert sich wie folgt: Nach einer mathematischen Einführung über Vektorrechnung und Vektoranalysis werden zunächst die Vektoren des elektromagnetischen Feldes definiert, die Grundgleichungen auf empirischer Grundlage abgeleitet und die verschiedenen Einheitensysteme erörtert. In weiteren Kapiteln folgt dann die Lehre von der Elektrostatik und den stationären Strömen. Der Induktion, insbesondere den quasistationären Strömen ist das nächste Kapitel gewidmet. Sehr eingehend werden die Energieverhältnisse im elektromagnetischen Feld auseinandergesetzt. Etwas kurz kommt die elektromagnetische Lichttheorie weg, von der in dem kurzen Schlußkapitel bloß die einfachsten Erscheinungen der Wellenfortpflanzung im Äther und im isotropen Dielektrikum und der Reflexion und Brechung behandelt werden. *Fürth* (Prag).

Swann, W. F. G.: *Electrodynamics, and the mutual annihilation of positive and negative electricity.* *J. Franklin Inst.* **213**, 1—16 (1932).

Betrachtung über den Zerstrahlungsprozeß zweier entgegengesetzt gleicher Ladungsverteilungen auf Grund der klassischen Elektrodynamik. *G. Beck* (Leipzig).

Gemant, A.: Wanderwellen in stetig veränderlichen Kabeln. *Arch. Elektrotechn.* **26**, 11—18 (1932).

Vorliegende Arbeit behandelt die Fortpflanzung einer laufenden Welle mit ursprünglich rechteckiger Front entlang Kabeln mit örtlich konstanter verteilter Selbstinduktion und Widerstand, aber veränderlicher verteilter Kapazität mit Hilfe der Heavisideschen Rechenweise (Operatoren). Insbesondere werden betrachtet: das induktionsfreie Kabel, das Kabel ohne und das Kabel mit Widerstand. Im ersten Fall ist infolge der veränderlichen Kapazität die Steilheit der Stirn vergrößert. Im zweiten Fall bleibt die Rechteckform erhalten; im dritten verursacht die veränderliche Kapazität eine größere Steilheit der Stirn.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mandelstam, L., und N. Papalexi: Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung. (*Zentr.-Radiolabor., Staatl. Elekt. Vereinig., Leningrad.*) *Z. Physik* **73**, 223 bis 248 (1931).

Es werden Schwingungen eines rückgekoppelten Kondensatorkreises untersucht, deren Periode N -mal so groß ist (N ganze Zahl) als die Periode der sie erregenden äußeren Kraft (Resonanz 2. Art). Die äußere Kraft wird sinusförmig angenommen.

Mathematisch gesprochen werden stabile im Sinne von Liapunoff periodische Lösungen (Periode 2π) der Differentialgleichung $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \sin Nt$ (1) gesucht; λ_0, μ Konstanten, μ hinreichend klein. Für $\mu = 0$ besitzt (1) die periodische Lösung $x = A \cos t + B \sin t + \frac{\lambda_0 \sin Nt}{1 - N^2}$ (2) („Nullte“ Näherung); für $\mu \neq 0$ aber hinreichend klein, bleiben nur für eine gewisse Anzahl von A, B -Werten periodische Lösungen erhalten, deren nullte Näherung die Form (2) besitzt. Es werden mit Hilfe der von Poincaré entwickelten Methoden diese A, B -Werte berechnet; dann wird nach Liapunoff die Stabilität der gefundenen Lösungen untersucht. Die erhaltenen Resultate werden auf den Fall eines nichtangefachten Röhrengenerator angewandt, die Periode, deren Schwingungskreis ungefähr N -mal so groß ist als die der erregenden Kraft; es wird eine eigenartige, scharf ausgesprochene „Resonanzerscheinung“ festgestellt: Schwingungen von großer „Amplitude“ sind nur in einem schmalen Frequenzintervall vorhanden; außerhalb dieses Intervalls reißen die Schwingungen ab. Der Effekt findet nur bei mittleren Größen der Amplitude der äußeren Kraft statt; er hat einen unteren und einen oberen Schwellenwert. Für selbstangefachte Schwingungskreise bewirkt eine derartige äußere Kraft eine Löschung. Es werden experimentelle Resultate angegeben und mit den theoretischen verglichen; es wird eine qualitative Übereinstimmung festgestellt.

A. Andronow und A. Witt (Moskau).

Llewellyn, F. B.: Constant frequency oscillators. (*Bell Telephone Labor., New York.*) *Proc. Inst. Radio Eng.* **19**, 2063—2094 (1931).

Das wichtigste Mittel zur Konstanthaltung der Frequenzen von Schwingungskreisen mit Elektronenröhren ist der piezoelektrische Kristall. Von dem frequenzändernden Einfluß der Spannungsschwankungen der Batterien kann man sich jedoch schon durch geeignete Bemessung der Konstanten der an die Röhre angeschlossenen Schwingungskreise frei machen. Es wird für eine Reihe von Schwingungskreisen unter der Voraussetzung linearer Charakteristiken (kleiner Amplituden der Schwingungen) die Bedingung aufgestellt, unter der die erzeugte Frequenz von den Konstanten der Röhre, die sich mit den Spannungsschwankungen ändern, unabhängig wird. Mit dem Experiment wird befriedigende Übereinstimmung gefunden. *Cauer (Göttingen).*

Boyajian, A.: Mathematical analysis of non-linear circuits. Pt. I: Some circuits involving saturation. *Gen. Electr. Rev.* **34**, 531—537 u. 745—751 (1931).

Dieser Aufsatz befaßt sich mit dem Stromverlauf bei aufgeprägter sinusförmiger Spannung in Stromkreisen, die Eisen enthalten. Die Magnetisierungskurve wird hierzu durch zwei Gerade verschiedener Neigung angenähert, die mit einem Knick aneinander schließen. Mit Hilfe dieser einfachen Näherung behandelt Verf. folgende Fälle: 1. äußere Sinusspannung in Serie mit Eisenspule; 2. äußere Sinusspannung in Serie mit Luftspule und Eisenspule; 3. äußere Spannung in Serie mit Eisenspule und Ohmschem Widerstand; 4. äußere Sinusspannung in Serie mit Eisenspule und Kapazität; 5. äußere Sinusspannung in Serie mit Eisenspule, Kapazität und Ohmschem Widerstand; 6. Eisenspule mit Gleichstromerregung; 7. Lichtbogenerscheinungen; 8. Stromkreise mit Elektronenröhren.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Moon, P. H.: The theory of thermal breakdown of solid dielectrics. (*Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge.*) *Trans. Amer. Inst. Electr. Eng.* **50**, 1008—1021 (1931).

Die Theorie des Wärmedurchschlages fester Isolatoren (als lineares Wärmeproblem) nach V. Fock [*Arch. f. El.* **19**, 71 (1927)] wird mit Betonung der grundlegenden Annahmen dargestellt und die Beziehung für die Durchbruchsspannung als Funktion einer Größe $C = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \kappa_2}{(\lambda_1 + \lambda_2) \kappa_2 + \delta \lambda_1 \lambda_2} \cdot \frac{d}{2 \kappa_1}$ gezeigt, wenn λ_1, λ_2 die Wärmeübergangszahlen von Isolator zu Elektrode bzw. von Elektrode zum umgebenden Medium, κ_1, κ_2 die Wärmeleitahlen und d, δ die Dicken von Isolator und Elektroden bedeuten. Für den elektrischen Widerstand des Isolatoren ist dabei die Temperaturabhängigkeit $\varrho = \varrho_0 \cdot e^{\beta_1/T}$ verwendet, und β_1/T ist auch Parameter für die Durchbruchsspannung. In Zahlentafeln

und Kurven werden die gerechneten Werte, als Erweiterung der Fock-Tafeln, gegeben und eine Annäherung abgeleitet, die für praktische Berechnungen die Werte der Durchbruchsspannung aus zwei Kurven abzulesen gestattet.

Um experimentell die Brauchbarkeit nachzuweisen, wurden Versuche an Quarz und Glas durchgeführt, wobei zu Vermeidung von Polarisierungseffekten Elektroden aus Materialien verwendet wurden, die die notwendigen Ionen nachlieferten. Es zeigt sich mit Berücksichtigung der durch die Theorie auferlegten Einschränkungen eine befriedigende Übereinstimmung.

Ernst Weber (New York).

Cauer, W.: Beschränkte Funktionen und Wechselstromschaltungen. (*Ges. f. angew. Math. u. Mech., Bad Elster, Sitzg. v. 13.—18. IX. 1931.*) *Z. angew. Math. u. Mech.* **11**, 436—437 (1931).

Die n -zeilige quadratische Matrix \mathfrak{A} des Systems von Strom-Spannungsgleichungen eines elektrischen Netzwerkes vom Freiheitsgrad n aus Induktivitäten, Kapazitäten und Ohmschen Widerständen ist symmetrisch und von der Form $\mathfrak{A} = \lambda \mathfrak{L} + \mathfrak{R} + \lambda^{-1} \mathfrak{D}$; \mathfrak{L} , \mathfrak{R} und \mathfrak{D} sind die Matrizen der positiv definiten quadratischen Formen $\sum L_{ik} x_i x_k$ usw., welche physikalisch die magnetische Energie in den Spulen, den Leistungsverbrauch in den Widerständen und die elektrische Energie in den Kondensatoren bedeuten; $\lambda = i\omega$, ω = Kreisfrequenz. Enthalten $m \leq n$ von den unabhängigen Umläufen äußere Klemmenpaare, so ist die Matrix \mathfrak{B} der m zugehörigen Strom-Spannungsgleichungen eine Hauptminor von \mathfrak{A} ; ihre Elemente $\mathfrak{B}_{ik}(\lambda)$ sind die „Frequenzcharakteristiken“ der Schaltung. Eine solche Matrix \mathfrak{B} wird „darstellbar“ genannt, und es wird gefragt, welche Eigenschaften eine Funktion haben muß, damit sie eine Frequenzcharakteristik einer realisierbaren Schaltung sei. Hierzu dient folgende Definition: Eine Funktion $f(\lambda)$ heiße „positiv“, wenn sie in der rechten Halbebene regulär ist und positiven Realteil hat sowie auf der reellen Achse reell ist; entsprechend heiße eine symmetrische Matrix $(B_{ik}(\lambda))$ positiv, wenn ihre Elemente in der rechten Halbebene analytisch und auf der reellen Achse reell sind sowie die Matrix ihrer Realteile für solche λ , deren Realteil positiv ist, positiv definit ist, d. h. wenn $B_{ik} x_i x_k > 0$ ist für alle reellen, nicht sämtlich verschwindenden Werte von x_i, x_k . Verf. vermutet folgenden Satz: „Die Klasse der darstellbaren Matrizen ist identisch mit der der positiven Matrizen.“ Bewiesen wurde derselbe bisher nur für $m = 1$ (Wechselstromwiderstände) und für $m = 2$ mit der Einschränkung $B_{11} = B_{22}$, d. h. den symmetrischen Vierpol, der sich auf $m = 1$ zurückführen läßt. Daß jede darstellbare Matrix positiv sein muß, ist leicht zu beweisen und im Falle $m = 1$ unmittelbar anschaulich (der Wirkanteil einer Impedanz kann nicht negativ sein); die Beweisschwierigkeit liegt in der Umkehrung. — Hingewiesen wird noch auf die bisherigen Teilbeweise sowie auf die Art und die technische Bedeutung des bei der Aufgabe, Schaltungen mit verlangten Frequenzcharakteristiken anzugeben, auftretenden Interpolationsproblems. *Baerwald (Berlin).*

Jackson, W.: The transient response of the triode valve equivalent network. *Philosophic. Mag., VII. s. 13*, 143—153 (1932).

Burch, C. R.: On asymmetric telegraphic spectra. *Proc. Inst. Radio Eng.* **19**, 2191—2218 (1931).

Behandelt die Frage der „single side band Morse transmission“, die schon von H. B. Nyquist, *Journ. Amer. Inst. Electr. Engng.* **1928**, 214, untersucht wurde.

Cauer (Göttingen).

Blondel, André: Sur le calcul des lignes à haute tension formées de tronçons à constante différente avec interposition de transformateurs. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194**, 224—228 (1932).

Relativitätstheorie.

Einstein, A., und W. Mayer: Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. H.* **25**, 541—557 (1931).

Der von Kaluza entdeckte formale Zusammenhang zwischen der fünfdimensionalen Riemannschen Geometrie und der vierdimensionalen Geometrie erweitert um

den Elektromagnetismus, wird in neuer Interpretation, unter Vermeidung der Einführung einer fünften Koordinate, einer einheitlichen Theorie von Gravitation und Elektromagnetismus zugrunde gelegt. Anstatt Erweiterung des 4-dimensionalen Kontinuums zu einem 5-dimensionalen soll in der 4-dimensionalen Welt ein 5-dimensionaler Vektorraum existieren. Zum Operieren mit diesen „Fünfervektoren“ benötigen wir neue Größen neben der Maßbestimmung g_{ik} . Insbesondere eine fünfdimensionale quadratische Form $g_{i\kappa}$ und die Verschiebungsgrößen $\Gamma'_{\pi q}$ (griechische Indizes sollen generell von 1–5, lateinische von 1–4 laufen). Die Verbindung zwischen der Metrik $g_{i\kappa}$ und g_{ik} wird durch den „gemischten“ Tensor γ_i^k hergestellt, mit dessen Hilfe man auch jedem Fünfervektor einen Vierervektor und umgekehrt zuordnen kann. Einige plausible Forderungen bezüglich der Eigenschaften der Parallelverschiebung eines Vierervektors, verbunden mit der gleichzeitigen Verschiebung des korrespondierenden Fünfervektors, lassen erkennen, daß zur Charakterisierung der Γ -Größen außer den $g_{i\kappa}$ und γ_i^k noch ein antisymmetrischer Tensor F_{kq} erforderlich ist. Mit Hilfe der Γ -Größen kann man die Fünferkrümmung des Vektorraumes bilden und durch Verjüngung zum Tensor U_{ip} gelangen, der das R_{ik} der früheren Theorie repräsentiert in bezug auf den Raum der Fünfervektoren. Dieser Tensor läßt sich mit Hilfe des gewöhnlichen Linienelements g_{ik} und dem antisymmetrischen Tensor F_{kq} ausdrücken und zeigt gerade diejenige Erweiterung des Riemannschen R_{ik} , die der üblichen Verknüpfung des Materietensors mit dem Maxwellischen Spannungs-Energie-Tensor entspricht. Setzt man als Feldgleichungen:

$$U_{ip} = 0 \quad (46)$$

$$N_{rkp} = 0 = F_{rk,p} + F_{kp,r} + F_{pr,k} \quad (47)$$

so erkennt man, daß diese Gleichungen die Feldgleichungen von Gravitation und Elektrizität zusammenfassen, wobei in (46) die Gravitationsgleichungen und das erste System der Maxwellischen Gleichungen vereinigt erscheinen. Das Prinzip der geodätischen Linie liefert genau die relativistische Bewegungsgleichung des elektrisch geladenen Massenpunktes, wobei das Verhältnis der elektrischen zur ponderablen Masse als streng konstant herauskommt. Das Problem der materiellen Teilchen wird von der Theorie vorerst nicht erfaßt.

Lanczos (Lafayette).

Kunii, Shūjiro: On a unified theory of gravitational and electromagnetic fields. Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. A 14, 195–212 (1931).

Die geometrische Grundlage dieser Theorie ist eine (vierdimensionale) Mannigfaltigkeit mit halbsymmetrischem und metrischem Zusammenhang:

$$P_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) = \frac{1}{2} (\varphi_{\nu} \delta_{\mu}^{\nu} - \varphi_{\mu} \delta_{\lambda}^{\nu})$$

$$T_{\lambda\mu}^{\nu} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \varphi_{\lambda} \delta_{\mu}^{\nu} - g_{\lambda\mu} \varphi^{\nu} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + T_{\lambda\mu}^{\nu}.$$

Nach Entwicklung des erforderlichen geometrischen Kalküls (geodätische Kurven und Krümmungstheorie) werden die Fundamentaltensoren $g_{\lambda\mu}$ und φ_{ν} als Gravitations- bzw. elektromagnetische Potentiale interpretiert. Bildet man mit ihrer Hilfe die skalare Dichte:

$$\mathfrak{H} = H \sqrt{-g} = (R - L) \sqrt{-g}$$

und variiert das Hamilton-Integral $\int \mathfrak{H} dx$ in bekannter Weise nach $g^{\lambda\mu}$ und φ_{ν} , so können die Forderungen der Gravitations- und elektromagnetischen Feldgesetzlichkeit in die Form:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\mathfrak{H}]_{\lambda\mu} = -\kappa T_{\lambda\mu}; \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} [\mathfrak{H}]^{\nu} = 2\kappa S^{\nu}$$

gebracht werden ($g = |g^{\lambda\mu}|$; R Krümmungsskalar; $L = \kappa/2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 6 \Phi$; $F_{\lambda\mu} = \text{curl } \varphi_{\lambda}$; $\kappa = \text{const}$) unter Verwendung der Symbolik $[\]$ für Variationsableitungen und Einführung der Tensoren bzw. Tensordichten $\mathfrak{T}_{\lambda\mu}$, \mathfrak{S}^{ν} für Energie und Ladungsstrom. Im einheitlichen Feld dieser Theorie ist ein Analogon zu Einsteins „Kastenexperiment“ unmöglich. Mathematisch gesprochen: die Annahme der Exi-

stanz eines Bezugssystems, für welches die Zusammenhangskomponenten örtlich verschwinden, steht im Widerspruch zum nach Voraussetzung halbsymmetrischen Charakter der Übertragung. Verf. gelingt auch die Ableitung der bekannten Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = - \frac{1}{\mu_0} F_\alpha^\nu S^\alpha$$

geladener Partikel. Doch fallen in dieser Theorie die Weltlinien der Lichtausbreitung nicht mit den geodätisch-isotropen Kurven des Kontinuums zusammen. *M. Pinl.*

McCrea, W. H., and G. C. McVittie: The expanding universe. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **92**, 7—12 (1931).

In einer früheren Arbeit [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **91**, 128 (1930)] erhielten die Verf. das Resultat, daß ein statisches, gleichförmig mit Masse angefülltes Einsteinsches Universum (Zylinderwelt) ein größeres Volumen hat als ein statisches Universum gleicher Gesamtmasse mit einem Massenpunkt im Ursprung bei sonst gleichförmiger Dichte. In einer weiteren Arbeit [daselbst **91**, 274 (1931); dies. Zbl. **1**, 35] fand der eine der beiden Verf. (McVittie), der aber in anderen Koordinaten rechnete, daß genau die umgekehrten Verhältnisse eintreten, wenn viele Massenpunkte nach Zufall zerstreut in einem Felde homogener Dichte liegen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß beide Resultate nicht aufrechterhalten werden können, weil Singularitäten der Metrik bei den Antipoden der angenommenen Massenpunkte übersehen worden waren. Diese Singularitäten waren in den Koordinaten der zweiten Arbeit offenbar, in denen der ersten aber nicht unmittelbar erkennbar. — Wird nun die mit jedem Massenpunkt gleichzeitig auftretende antipodische Masse bei der Berechnung des Eigenvolumens der Welt berücksichtigt, so ergibt sich dieses genau so groß wie im Felde ganz gleichförmiger Dichte. Damit fällt die Möglichkeit weg, zu sagen, daß die Ausbildung von Kondensationen in einer Einsteinschen Zylinderwelt der „Katalysator“ ihrer Ausdehnung sei (im Sinne der Friedmann-Lemaître'schen Theorie). Ferner üben die Verf. eingehend Kritik an der Arbeit von Lemaître [daselbst **91**, 490 (1931); dies. Zbl. **2**, 92], die ebenfalls das Ziel hatte, eine „Ursache“ für die Ausdehnung der Welt zu finden. *Heckmann (Göttingen).*

Swann, W. F. G.: Mass and energy. *J. Franklin Inst.* **213**, 63—74 (1932).

Es wird die relativistische Massenveränderung untersucht, welche ein System erfährt, das unter dem Einfluß irgendwelcher Kräfte auf ein kleines Volumen komprimiert wird (Modell eines Elektrons). *G. Beck (Leipzig).*

Rabbeno, G.: La trasformazione di Lorentz e la relatività della massa ricavate con ragionamento diretto. *Atti Soc. ligust. Sci., N. s.* **10**, 265—277 (1931).

Quantentheorie.

● **Haas, Arthur:** Das Naturbild der neuen Physik. **3.**, verm. u. verb. Aufl. Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1932. 129 S. u. 8 Abb. RM. 5.—.

Die Vorträge über das Naturbild der neuen Physik sind vor Hörern aller Fakultäten gehalten worden. Sie berichten in knapper und klarer Form von den Grundlagen und wichtigsten Ergebnissen der modernen Physik ohne jede mathematische Formel. Die neue Auflage ist um einen Vortrag über die neue Mechanik vermehrt worden; auch in den übrigen Vorträgen wurde die Entwicklung der Physik seit der letzten Auflage berücksichtigt. Das Buch ist für gebildete Laien und Studenten in den ersten Semestern als vortreffliche leichtverständliche Darstellung der modernen physikalischen Naturbetrachtung bestens zu empfehlen. *Bechert (München).*

Kakinuma, Usaku: Physical interpretation of the wave function in wave mechanics. (*Mitsubishi Labor., Hongo, Tokyo.*) *Proc. phys.-math. Soc. Jap., III.* s. **13**, 269—276 (1931).

Formale Betrachtungen über eine Wellengleichung, welche elektromagnetische und Gravitationspotentialen enthält und die innere Struktur des Elektrons darstellen soll. *L. Rosenfeld (Lüttich).*

Carrelli, A.: Über die Kernstruktur. *Physik. Z.* **33**, 73—76 (1932).

Es wird der Versuch gemacht, unter Benutzung des Gamowschen Tröpfchenmodells auf Grund der empirischen Packungskurve die Kurven zu bestimmen, die sich bei konstant gehaltener Zahl von freien Kernelektronen ergeben. Weiter wird versucht, systematische Energieänderungen festzustellen, wenn an einen stabilen Kern neue Aggregate von Teilchen angelagert werden. Insbesondere ergibt sich, daß die Packungsenergie pro Elektronenpaar im Mittel sehr erheblich ist.

G. Beck (Leipzig).

Bhagavantam, S.: Reversal of circular polarisation in Raman scattering. *Indian J. Phys.* **6** a. *Proc. Indian Assoc. Sci.* **15**, 389—400 (1931).

Die Streuung von zirkular polarisiertem Licht durch rotierende Moleküle wird klassisch behandelt. Es seien A, C Polarisierbarkeiten des Moleküls senkrecht bzw. parallel zur Achse und $\mu = \frac{2A+C}{3}$, $\gamma = C - A$. Das Molekül wird axialsymmetrisch angenommen, d. h. die Polarisierbarkeiten in allen zur Achse senkrechten Richtungen gleich. In der Vorwärtsrichtung ist ein mit $2\mu^2 - \frac{5}{9}\gamma^2$ proportionaler Teil zirkular polarisiert in demselben Sinn wie die einfallende Strahlung und ein Teil $\frac{2}{15}\gamma^2$ unpolarisiert. In die Rotations-Raman-Streuung (Rotationsfeinstruktur der Rayleigh-Linie) ist bei jedem Zweig ein Teil $\frac{1}{12}\gamma^2$ in umgekehrtem Sinn zirkular polarisiert und der andere Teil $\frac{1}{30}\gamma^2$ ist unpolarisiert. In der Senkrechtichtung sind die Ergebnisse identisch mit denjenigen für unpolarisierte einfallende Strahlung. — Der Fall von stark depolarisierten Oszillationslinien, die in der Vorwärtsrichtung umgekehrte Zirkularpolarisation zeigen, wird kurz diskutiert. Die Schlußfolgerungen werden durch die experimentellen Ergebnisse von Bär und Hanle gestützt.

Waller (Zürich).

Cabannes, J.: Considérations théoriques sur la polarisation circulaire de la lumière dans l'effet Raman. *J. Phys. et Radium*, VII. s. **2**, 381—391 (1931).

Den Betrachtungen ist folgendes Modell zugrunde gelegt. In einem ruhenden Molekül induziert das erregende Licht (\mathcal{E}) ein elektrisches Moment $\mathcal{M} = \alpha \mathcal{E}$. α sei hierbei ein symmetrischer Tensor mit zwei gleichen Hauptachsen g' und einer davon verschiedenen g . Durch die Rotation sollen diese Werte nicht geändert werden, bei Schwingungen des Moleküls mit der Frequenz s soll die Abhängigkeit von g' und g durch die Koeffizienten λ und μ in folgender Weise ausgedrückt sein:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(g + 2g') &= \frac{1}{3}(g_0 + 2g'_0) + \mu \cos st, \\ g - g' &= (g_0 - g'_0) + \lambda \cos st.\end{aligned}$$

Ein ruhendes Molekül gibt hiernach bei zirkularer Einstrahlung ($Z = \cos \omega t$, $Y = \sin \omega t$) zwei gleichsinnig (richtig) zur Einstrahlung zirkular polarisierte Streustrahlanteile und zwei entgegengesinnige (verkehrte); die Intensitäten der richtig zirkularen (I_r) und verkehrt zirkularen (I_v) Anteile errechnet sich nach Mittelung über alle möglichen Lagen der Hauptachsen des Tensors α zur Einfallrichtung des erregenden Lichts zu: $I_r = 1/g(g + 2g')^2 + \frac{1}{45}(g - g')^2$, $I_v = \frac{2}{15}(g - g')^2$. In diesem Fall ist stets $I_r > I_v$ und der Depolarisationskoeffizient $\varrho = \frac{I_v}{I_r + I_v} < 0,5$. — Ein rotierendes Molekül (Rotationsfrequenz α) liefert die drei Ramanstreustrahlen mit den Frequenzen $\omega = 2\alpha$ (P -Strahl), ω (Q -Strahl) und $\omega - 2\alpha$ (R -Strahl). Für den Q -Strahl ergibt sich dasselbe Ergebnis wie für das nichtrotierende Molekül. Bei P - und R -Strahl ist $I_r = \frac{1}{12}(g - g')^2$; $I_v = \frac{1}{24}(g - g')^2$, $\varrho = \frac{1}{2}$. Hier überwiegt die verkehrte Polarisation. — Bei Berücksichtigung der Schwingung treten Strahlen der Frequenzen $\omega \pm s$ auf, und zwar ist im Bereich $0 \leq \lambda \leq 3\mu$ die richtige Polarisation überwiegend mit $0 \leq \varrho \leq 0,5$, dagegen im Bereich $0 \leq \mu \leq \frac{1}{3}\lambda$ überwiegt die verkehrte Polarisation mit $0,5 \leq \varrho \leq \frac{6}{7}$. — Das Ergebnis dieser Überlegung deckt sich mit Hanles Beobachtungsdaten.

W. Weizel (Karlsruhe).

Mecke, R.: Bandenspektroskopie und Photochemie. (*Phys.-Chem. Inst., Univ. Heidelberg.*) *Physik. Z.* **33**, 1—14 (1932).

Der Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über eine Reihe bekannter Anwendungsmöglichkeiten der Bandenspektroskopie auf photochemische Prozesse und Probleme.
W. Weizel (Karlsruhe).

Scatchard, G.: Die Anwendung der Debyeschen Elektrolyththeorie auf konzentrierte Lösungen. *Physik. Z.* **33**, 22—32 (1932).

Es wird der Versuch gemacht, die Hückelsche Erweiterung der Debyeschen Theorie, welche für konzentrierte Lösungen das thermodynamische Verhalten durch die Abnahme der Dielektrizitätskonstante (D. K.) mit der Konzentration zu erklären versuchte, dadurch zu verbessern, daß im Gegensatz zu Hückel ein Unterschied zwischen dem für die Berechnung der Hydratationsenergie maßgebenden „Ionenradius“ und dem „Annäherungsabstand“ der Ionen gemacht wird. Dabei werden verschiedene Annahmen über den Konzentrationsverlauf der D. K. zugrunde gelegt, und es wird darauf hingewiesen, daß die makroskopisch gemessene D. K. nicht mit der für die Wirkungen der Ionen aufeinander maßgebenden D. K. identisch sein wird.

E. Hückel (Stuttgart).

Halpern, Otto: Über magnetische Sättigungsercheinungen bei sehr tiefen Temperaturen. *Ann. Physik, V. F.* **12**, 169—180 (1932).

Das spektroskopische sowie sein magnetisches Verhalten in Lösungen zeigen, daß der Grundzustand des Gd^{+++} -Ions ein 8S -Term ist. Legt man diese Tatsache zugrunde, so ergibt die Quantenstatistik die Abhängigkeit des paramagnetischen Momentes vom äußeren Feld und der Temperatur. Sie wird berechnet und in sehr befriedigender Übereinstimmung mit den Messungen gefunden im Gegensatz zu dem nach der Langevinschen Formel berechneten Verlauf. Allerdings tritt auch hier noch ein Widerspruch zum Nernstschen Wärmesatz auf, indem mit verschwindendem äußeren Feld und verschwindender Temperatur die Entropie nicht nach Null, sondern nach dem Wert $S = Nk \log 8$ strebt. Es wird die Möglichkeit diskutiert, diese Schwierigkeit durch die Berücksichtigung wenn auch schwacher innerer Austauschkräfte zu beseitigen. Ferner wird bemerkt, daß die von Kramers geforderte Aufspaltung des 8S -Terms jedenfalls durch die Messungen der Magnetisierung an Kristallpulvern nicht bestätigt wird.

Bloch (Leipzig).

Halpern, Otto: Notiz über die Rotationspolarisation ferromagnetischer Körper. *Ann. Physik, V. F.* **12**, 181—184 (1932).

Ferromagnetische Substanzen zeigen eine Magnetorotation, wie sie in gewöhnlichen paramagnetischen Substanzen erst in äußeren Magnetfeldern von der Stärke des Weiss'schen Feldes zu erwarten wäre. Nun ist das von der magnetischen Wechselwirkung herrührende innere magnetische Feld in einem Ferromagnet etwa 10^4 mal kleiner als das Weiss'sche; dagegen ergeben die nach der Heisenbergschen Theorie für den Ferromagnetismus entscheidenden Austauschglieder eine Aufspaltung der in der Dispersionsformel auftretenden Frequenzen, die die richtige Größenordnung der Rotationspolarisation qualitativ verstehen läßt. Eine genauere Berechnung wird wegen mangelnder Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen nicht durchgeführt.

Bloch (Leipzig).

Peierls, R.: Zur Frage des elektrischen Widerstandsgesetzes für tiefe Temperaturen. *Ann. Physik, V. F.* **12**, 154—168 (1932).

In einer früheren Arbeit [*Ann. Phys.* **4**, 121 (1930)] hatte der Verf. auf die Wichtigkeit für die Einstellung des thermischen Gleichgewichtes der Leitungselektronen und elastischen Gitterschwingungen eines Metalls hingewiesen, die den sogenannten „Umklappprozessen“ zukommt, bei denen sich die Wellenzahlen um die Größenordnung 2π verändern. Es wird nun eine Richtigstellung der dort gegebenen Berechnung des elektrischen Widerstandes gegeben, indem gezeigt wird, daß diese „Umklappprozesse“ keineswegs als kleine, sondern vielmehr als große Störung betrachtet werden müssen.

Man erhält so für den Fall, daß die Fläche, innerhalb deren im energetisch niedrigsten Zustand des Metalls alle Zellen besetzt sind, mehrfach zusammenhängend ist, an Stelle des früher erhaltenen T^4 - ein T^5 -Gesetz für den Widerstand bei tiefen Temperaturen, wie dies auch die Messungen zu erfordern scheinen. *Bloch (Leipzig).*

Gans, Richard: Zur Theorie der Magnetisierungskurve isotroper Ferromagnetika in mittleren und starken Feldern. (Vorl. Mitt.) (II. Phys. Inst., Univ. Königsberg.) *Physik. Z.* **33**, 15—17 (1932).

Unter der Annahme, daß in einem magnetisierten Elementargebiet eines Kristalls mit ausgezeichneter Achse die freie Energie gegeben ist durch $f = c \sin^2 \vartheta$, wo ϑ den Winkel zwischen der Magnetisierungsrichtung und der Achse bedeutet, wird durch Mittelung über die verschiedenen Orientierungen der Achse in einem polykristallinen Material die mittlere freie Energie berechnet. Die Forderung, daß sie in einem äußeren Feld zu einem Minimum gemacht werden muß, liefert dann den Magnetisierungsverlauf, der für den Spezialfall starker und schwacher Magnetfelder explizit berechnet wird.

Bloch (Leipzig).

Pincherle, Leo: Sul magnetron di Hull. *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **14**, 290 bis 293 (1931).

Es werden verschiedene theoretische Arbeiten besprochen, die sich damit beschäftigen, die Wellenlänge eines Hullschen Magnetrons zu berechnen, auf das ein Magnetfeld parallel zu seiner Achse wirkt. Okabe erhielt theoretisch $\lambda = \frac{10600}{H}$ (λ Wellenlänge, H Magnetfeld) und konnte experimentell die Proportionalität mit $1/H$ bestätigen. Für den Zahlenfaktor ergab sich aber experimentell 13000. Verf. führt diese Diskrepanz darauf zurück, daß die Geschwindigkeitszunahme der Elektronen infolge des elektrischen Feldes nicht berücksichtigt sei. Rechnungen, die er unter Berücksichtigung dieser Beschleunigung durchführt, liefern die gleiche Formel mit einem Zahlenfaktor 12300. Die Abweichung gegenüber der experimentellen Formel liegt nun innerhalb der Fehlergrenzen.

R. Peierls (Zürich.).

Rojansky, V., and W. Wetzel: On quantum-mechanical reflection coefficients and their numerical determination. (*Phys. Labor., Univ. of Minnesota, Minneapolis.*) *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 1979—1988 (1931).

Für ein eindimensionales Problem kann die allgemeine Lösung der Schrödingerschen Differentialgleichung dargestellt werden vermittels eines einzigen partikulären Integrals einer anderen Differentialgleichung [W. E. Milne, *Phys. Rev.* **35**, 863 (1930)], so daß man zu einer numerischen Integration nur dieses zu berechnen hat. Mit Hilfe dieser Methode wird ein Verfahren zur numerischen Bestimmung von Reflexionskoeffizienten an beliebigen Potentialbergen entwickelt. Es ist immer anwendbar, wenn zu beiden Seiten des Berges eine analytische Lösung der Schrödinger-Gleichung bekannt ist.

Nordheim (Göttingen).

Rice, Oscar Knefler: On collision problems involving large interactions. (*Chem. Labor., Harvard Univ., Cambridge [U. S. A.]*) *Physic. Rev.*, II. s. **38**, 1943—1960 (1931).

Vielfach sind bei atomaren Stoßproblemen, besonders sobald ein Austausch von Elektronenenergie von Atom zu Atom bzw. Molekül stattfindet, die Wechselwirkungen zu groß, um als Störungen nach der Bornschen Methode behandelt werden zu können. Verf. entwickelt zwei Methoden zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Überganges (Energieaustausches) entsprechend guter und schwacher „Resonanz“. Mit (vollkommener) Resonanz ist dabei der Fall bezeichnet, daß die innere Energie der Stoßpartner vor dem Stoß, d. i. die Gesamtenergie des Systems abzüglich der Translationsenergie, gleich der nach dem Stoß ist. Es kann dabei also ein Austausch von innerer Energie stattfinden; sie soll aber nicht in Translationsenergie verwandelt werden. In diesem Falle läßt sich die Störungsrechnung nach dem von Dirac entwickelten Verfahren durchführen, und man erhält die Übergangswahrscheinlichkeit

als Funktion des Mindestabstandes, auf den sich die Stoßpartner nahekomen (als solcher läßt sich eine gewisse Kombination aus Anfangsgeschwindigkeit und Drehimpuls auffassen). Nach Überschreitung eines gewissen Wertes r_0 dieses Abstandes nimmt sie rasch ab; r_0 ist also in Fällen, wo eine mäßige Übertragung von innerer in translatorische Energie stattfindet (derart, daß noch mit „guter“ Resonanz gerechnet werden kann), ein Maß für den Wirkungsradius. — Im Falle schwacher Resonanz muß man sich erst die gegenseitige potentielle Energie der Stoßpartner als Funktion ihres Abstandes ausrechnen wie bei der Molekülbildung. Bei der gegenseitigen Bewegung treten dann neue Störungen auf, die aber im Falle schwacher Resonanz klein bleiben, so daß wenig Übergänge vorkommen. „Im allgemeinen läßt sich schließen, daß, wenn der Übergang bei einem (im Verhältnis zum gaskinetischen) großen Wirkungsradius stattfindet, weniger Energie von innerer in translatorische (oder umgekehrt) übertragen werden kann, als bisher angenommen wurde.“ Wessel (Coimbra).

Pauling, Linus, and J. Sherman: Screening constants for many-electron atoms. The calculation and interpretation of X-ray term values, and the calculation of atomic scattering factors. (*Gates Chem. Labor., California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Z. Kristallogr. usw.* A **81**, 1—29 (1932).

Die Berechnung von Atomeigenschaften aus Bewegungen der einzelnen Elektronen in Zentralfeldern mit der potentiellen Energie $-(Z - S)e^2/r$ ist sehr bequem; man muß aber für verschiedene Eigenschaften verschiedene „Abstimmungs-Konstanten“ S benutzen, je nachdem wie die betrachtete Eigenschaft von Bahndimensionen und Kernladung abhängt. Geht die Eigenschaft für wasserstoffähnliche Atome mit n^2/Z^2 (z. B. Größe mit n^2/Z , Refraktion mit n^6/Z^3 , Energie mit Z^2/n^2), so läßt sich S als Funktion von r/t schreiben, so daß man S -Werte der einen Eigenschaft in S -Werte einer anderen umrechnen kann. Es wird (für innere Elektronen auf Grund früherer Rechnungen, für äußere Elektronen aus empirischen Werten der Refraktion und empirischen Termwerten) eine Tabelle angegeben, aus der für alle Atome und Ionen, für alle Elektronen darin und für alle Eigenschaften die Abschirmungskonstanten entnommen werden können. Mit diesen Konstanten werden Ionisierungs-Energien, Röntgenterme und besonders ausführlich Atomstreuaktoren für Röntgenstrahlen berechnet. Die Streuaktoren zeigen eine kleine Abweichung von den mit Hartrees Methode (die sehr mühsam und nur für wenige Atome durchgeführt ist) berechneten, die bei leichten Atomen wesentlich kleiner, bei schweren etwa ebenso groß ist wie die Abweichung der mit Thomas' und Fermis Methode berechneten. *F. Hund.*

Astronomie und Astrophysik.

Plummer, H. C.: On astronomical refraction. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **92**, 25—36 (1931).

Der Verf. versucht, verschiedene Näherungsformeln für die Abhängigkeit der astronomischen Refraktion R von dem Zenithabstand z anzugeben. Eine Vorstellung vom ungefähren Gang jener Abhängigkeit gibt die Formel:

$$R' = \tan(z^\circ - z') = \tan \frac{5}{6} z^\circ.$$

Diese Formel gibt die Refraktion für $z = 0^\circ$, für $z = 50^\circ$ und für etwa $z = 89,5^\circ$ richtig an. Bei größerer Annäherung an den Horizont gilt sie indessen nicht mehr. Eine andere Formel, die der Verf. ableitet, ist $R = A \tan z - B \tan^3 z$, wo $A = 58,294''$ und $B = 0,0668''$ ist. Dieser Ausdruck gilt angenähert bis $z = 75^\circ$. Für A und B werden noch Integraalausdrücke angegeben. Auch für den Wert der Horizontalrefraktion C gibt er einen Integraalausdruck. — Unter gewissen Annahmen über die Abhängigkeit des Brechungsindex n der Luftschichten von deren Höhe r leitet der Verf. noch eine Reihe weiterer Formeln für die Refraktion ab. Umgekehrt benutzt er auch die oben angegebenen experimentell ermittelten Werte von A und B , um für die zunächst rein formelmäßig angenommene Abhängigkeit des Brechungsindex von der Höhe der

Luftschichten bestimmte Zahlenwerte zu errechnen. So erhält er für die Annahme $n^{k+1}r = \text{const}$ für k den Wert 8,117. Für C ergibt sich mit dieser Annahme und diesem Zahlenwert aus dem Integral der Wert $28' 42''$, der um etwa 20% falsch ist. — Es werden noch verschiedene andere Formeln für R abgeleitet, unter anderem auch unter der Annahme, daß die Atmosphäre aus einer O - und einer N -Schicht zusammengesetzt ist.

Picht (Berlin-Lankwitz).

Belorizky, D.: Sur l'application des méthodes de M. Sundman aux problèmes de la mécanique céleste. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1321—1323 (1931).

Unter Anwendung der in dies. Zbl. 2, 212 und 3, 134 referierten Methoden diskutiert der Verf. nochmals die Möglichkeit der Anwendung der Sundmannschen Reihen in der „Mécanique céleste“, kommt jedoch zum Resultat, daß diese Reihen weder für die im Sonnensystem auftretenden Probleme noch für die dreifachen Sternsysteme von Interesse werden. Er schließt mit dem Bedauern, daß diese, von mathematischem Gesichtspunkte gesehen, so schönen Methoden gänzlich ohne Anwendungsmöglichkeiten in der Himmelsmechanik sind.

Burrau (Kopenhagen).

Brown, Ernest W.: On a criterion for the prediction of an unknown planet. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 92, 80—101 (1931).

Es sollen die Reststörungen eines Planeten in der Form $f(t) = p + qt + \sum C \sin(at + b) + \varepsilon$, dargestellt werden, wo p, q, C, b unbekannt, ε , der zufällige Beobachtungsfehler zur Zeit t und wenigstens eine der Frequenzen a , etwa a_0 , bekannt sein möge. Die Beobachtungen sollen einen gewissen Bahnbogen möglichst gleichmäßig bedecken. Durch Einführung der Glättungsfunktion $\Phi(t) = f(t + n) + f(t - n) - f(t)$ mit $a_0 n = 60^\circ$ wird die in Φ zu a_0 gehörige Amplitude zum Verschwinden gebracht. Φ hat im übrigen dieselben Säkular- und Absolutterme und dieselben Frequenzen wie f . Wird dieser Ansatz angewandt auf die restlichen Längenstörungen eines Planeten durch einen unbekannten äußeren Planeten, Kreisbahnen bei beiden Planeten und ein Achsenverhältnis $a'/a > \sqrt[3]{4}$ vorausgesetzt, so sind die Frequenzen a Vielfache der synodischen mittleren Bewegung, und die geglätteten Störungen sind in hohem Grade unempfindlich gegen Änderungen von a'/a , sowohl was die Gestalt der Kurve als auch was die Lage der Extrema anbelangt. Die Berücksichtigung von Exzentrizität und Neigung ändert die charakteristischen Eigenschaften der Φ -Kurve nur unbedeutend. Aus der $\Phi(t)$ -Kurve kann also geschlossen werden, ob die Reststörungen auf einen äußeren Planeten zurückgeführt werden dürfen und welches dessen Masse und sphärische Lage sind. Das Verfahren wird an einer Vausberechnung Neptuns aus den Reststörungen der Uranuslänge erprobt. Die von Leverrier und Adams benutzten Störungsreste schmiegen sich sehr gut der Φ -Kurve an. Da die Lage des Maximums nur wenig durch die Annahme über die Distanz beeinflusst wird, so wird erklärlich, daß Leverrier und Adams trotz fehlerhafter Bahnelemente treffende Voraussagen über die Stellung des unbekannten Planeten machen konnten. Die Glättung der modernen Reste in den Uranusstörungen (nach Abzug der Störungen durch Neptun) läßt keine Ähnlichkeit mit der Φ -Kurve erkennen, ebenso wenig die Reste in den Neptunstörungen. Die Reststörungen sind also zur Ableitung der Plutobahn unbrauchbar. Die Übereinstimmung zwischen dem von Lowell vorausgerechneten und dem beobachteten Ort ist zufällig. Als obere Grenze für die Masse Plutos ergibt sich aus den Störungsamplituden 0,5 der Erdmasse in Übereinstimmung mit photometrischen Abschätzungen Bowers. Die Aussichten für eine Massenbestimmung sind sehr ungünstig. Soll der wahrscheinliche Fehler kleiner als $1/4$ der Erdmasse herauskommen, so müßten die Störungen Neptuns durch Uranus auf $0'',2$ in den kurzperiodischen Termen bekannt sein. Wegen der nahen Kommensurabilitäten zwischen den Umlaufzeiten von Uranus, Neptun und Pluto ist die Abspaltung wichtiger Störungsterme praktisch unmöglich.

A. Klose (Berlin).

Barbier, D.: Excentricités probables des étoiles doubles visuelles dont l'orbite est encore inconnue. C. R. Acad. Sci. Paris 193, 1393—1396 (1931).

In this note the author continues his researches on the statistical properties of binary systems, in which the observed motion covers too small an arc to permit the calculation of the orbits. It is always possible to calculate e^2 (e = excentricity) if j, φ, ω and σ are known, j being the angle between radius vector and reference plane, φ that between the orbital plane and the normal to the reference plane, $\omega = \varrho'/\varrho \theta'$ and $\sigma = 1 - \varrho''/\varrho \theta'^2$. If $p(j, \varphi) dj d\varphi$ is the probability of a given values of j and φ

$$\bar{e}^2 = \iint e^2(j, \varphi, \omega, \sigma) p(j, \varphi) dj d\varphi$$

for a group of binaries. In the case under consideration $p(j, \varphi)$ is unknown, as in-

volution the length of the observed orbital arc. The author proposes the following method of determining e^2 . Put for $p(j, \varphi)$ any simple and acceptable function as a first approximation. Determine the value of the above double integral, denote it ε^2 . Then determine frequency function of ε^2 for various values of ω and σ . Put $e^2 = a_0 + a_1 \varepsilon^2 + a_2 \varepsilon^4 + \dots$ and determine $a_0, a_1, a_2 \dots$ so as to satisfy the observed frequency function of e^2 for known binaries. Knowing $a_0, a_1, a_2 \dots$ we can calculate e^2 for a group of binaries, whose orbits are unknown. As a first approximation the function

$$p(j, \varphi) = \frac{\cos j}{\int_D \int \cos j \, d j \, d \varphi}$$

can be used with advantage (D being determined by the condition $e^2 < 1$). The author determines numerical values of a_0, a_1, a_2 for 117 binaries with known orbits and finds this method useful for statistical studies of binaries, whose orbits are unknown (vgl. dies. Zbl. 3, 144).

B. P. Gerasimovič (Charkow).

Holm, Sture: On the statistical corrections in the comparison of magnitude scales. Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr 59, 1–25 (1931).

Fowler, R. H.: Further studies of Emden's and similar differential equations. Quart. J. Math., Oxford ser. 2, 259–288 (1931).

This paper gives exhaustive tables of the form as $x \rightarrow \infty$ of proper solutions of

$$d^2 \theta / dx^2 + x^\sigma \theta^n = 0, \quad (n > 1; \quad n = p/q; \quad p, q \text{ odd})$$

and of positive proper solutions of the same equation with p or q even, and of positive proper solutions of

$$d^2 \theta / dx^2 - x^\sigma \theta^n = 0. \quad (n = p/q > 1)$$

“Proper” solutions are defined to be real, continuous, and possessing continuous first derivatives. σ is a constant, and the first equation reduces to Emden's when $\sigma = -4$. The various possibilities to be distinguished depend on the sign of $\sigma + 2, 2\sigma + n + 3, \sigma + n + 1$. Some of the results have been given previously by the author [Quart. J. Math. 45, 289 (1914); Monthly Notices, R. A. S. 91, 63 (1930)], and the remaining ones are derived by similar methods in the present paper. The types of proper solution that occur are: “special solutions” (with no arbitrary constant); “Emden solutions” (with one arbitrary constant) which tend monotonically to a finite limit as $x \rightarrow \infty$; and other solutions (with two arbitrary constants) which may oscillate or tend to infinity. The asymptotic forms are tabulated, and some of them examined in detail.

W. H. McCrea (Edinburgh).

Siedentopf, H.: Der Polytropenindex im Sterninneren. (Univ.-Sternw., Jena.) Astron. Nachr. 244, 273–280 (1931).

The author seeks to relate the general behaviour of stellar interiors to the polytropic index n of the stellar material (matter and radiation), defined by

$$1 + 1/n = d \log P / d \log \varrho.$$

Here P = total pressure, ϱ = total density at distance r from the centre. He shows that $n(r)$ given by this equation depends only on the equation of state and the quantity kQ , when k is the absorption coefficient, and Q the average rate of energy-generation inside radius r . For an ordinary degenerate gas $n = 1.5$, and for a relativistically degenerate gas $n = 3$. When the ratio of the density of matter to the density of radiation tends to zero, then $n \rightarrow \infty$. The corresponding regions in the diagram of $\log \varrho$ and $\log T$ are shown, and they leave remaining a region in which n depends on the rate of energy-generation. The author studies this region by introducing the classical equation of state. Defining β, η in the usual notation by

$$\beta = \frac{R}{\mu} \varrho \frac{T}{P} \quad (1 - \beta) \eta = kQ / 4\pi c G$$

he shows that

$$n = \frac{(4 - 3\beta)\eta - 4}{4(1 - \beta) - (4 - 3\beta)\eta}$$

and gives a sketch of the curves $n = \text{const.}$ in the $(1 - \beta)$, η -diagram. The regions in this diagram available for actual stellar states are then determined by the considerations that for $n > 5$ the total mass would be infinite, while for $n < 1.5$ convection currents must appear, and $n < 0$ demands a negative density gradient. For $kQ = \text{const}$ we have Eddington's polytrope $n = 3$ or $\eta = 1$. For kQ increasing inwards we have a decrease of n towards the centre, and for kQ decreasing inwards, an increase of n towards the centre. On going inwards from the surface in the case $\eta > 1$ we must reach a part of the star in which there is convection, and then a part in which the density gradient changes sign. On going outwards from the centre in the case $\eta < 1$ we should reach a part of the star which can exist only for infinite mass. Thus we can set limits to the values of η possible for different parts of a star. W. H. McCrea.

Araki, Toshima: Über die Änderung der Rotationsbewegungsgröße und der Winkelgeschwindigkeit eines Sternes, dessen Masse durch die Verwandlung in die Strahlungsenergie allmählich abnimmt. (*Astrophys. Inst., Kais. Univ. Kyoto.*) Jap. J. Astron. u. Geophys. **9**, 63—71 (1931).

Es wird vorausgesetzt, daß die Masse eines Sternes sich allmählich in Strahlungsenergie verwandelt, wobei die Bewegungsgröße der verschwindenden Sternmasse gleichzeitig auch verschwindet. Verf. untersucht die dabei vorgehende Änderung der Rotationsbewegungsgröße H und der Winkelgeschwindigkeit w des Sternes und findet: a) H nimmt mit der Masse ab wie M^k , wobei

$$k = \frac{\int_0^1 \Phi(x) \Omega(x) \varrho(x) x^4 dx}{4\pi \int_0^1 \Phi(x) \varrho(x) x^2 dx} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \Omega(x) \varrho(x) x^4 dx}, \quad 0 < k \leq 1.$$

Für die Winkelgeschwindigkeit $w(r)$ und die Verteilung der Energiequellen $\varphi(r)$, die nicht nur von x , sondern auch von M in diesem Falle abhängig sind, werden folgende Funktionalformen geschrieben:

$$\varphi(M, x) = \varphi(M) \Phi(x), \quad w(M, x) = w(M) \cdot \Omega(x);$$

b) w ändert sich mit der Masse wie $1/\beta^2 M^{3-k}$, wenn der Stern die Hauptsequenz im Russellschen Diagramm durchläuft, $1 - \beta$ hat dabei die übliche Bedeutung aus der Eddingtonschen Theorie; c) bei konstanter Energieerzeugung pro Masseneinheit überall innerhalb eines Sternes ist $k = 1$ und w ändert sich gemäß $1/\beta^2 M^2$; d) ein Vergleich der Theorie mit den Kreikenschen Untersuchungen eines Zusammenhanges der Rotationsperioden und Durchmessern von 48 Sternen führt zur Schlußfolgerung, daß die Energieerzeugung pro Masseneinheit im Innern eines Sternes fast konstant ist, entsprechend der Voraussetzung $\eta = \text{const}$ in der Eddingtonschen Theorie des Strahlungsgleichgewichts. Hubert Slouka (Prag).

McVittie, G. C.: The gravitational effect of radiation on stellar structure. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **92**, 55—71 (1931).

Der Verf. betrachtet ein Modell, bestehend aus einem inkompressiblen, aber nicht isothermen Kern, in dem die Energiedichte der Strahlung von gleicher Größenordnung wie die der Materie ist, umgeben von einer nichtrelativistisch entarteten Zone ($p_G \sim \varrho^{5/3}$), während für die äußersten Teile die gewöhnliche Zustandsgleichung ($p_G \sim \varrho T$) angenommen wird. Es wird vorausgesetzt, daß die Energiequellen gleichförmig verteilt sind ($\epsilon = \text{const}$) und daß der Massenabsorptionskoeffizient im Stern örtlich konstant ist. Ausgehend von einem kugelsymmetrischen Linienelement und den Einsteinschen Feldgleichungen wird als erste Näherung eine Gleichung für den Gradienten des Gesamtdrucks abgeleitet, die formal die normale Gleichung des hydrodynamischen Gleichgewichts darstellt, wenn man in diese für die Dichte die Summe aus Massen- und Strahlungsdichte einführt. Dann werden die Gleichungen aufgestellt, die einen stetigen Übergang der Zustandsgrößen an den beiden Grenzen der entarteten Zone garantieren. Eine allgemeine Diskussion ihrer Auflösbarkeit erweist sich in Ermangelung numerischer Unterlagen als gegenwärtig unmöglich. In dem physikalisch interessanten Fall, daß in den beiden äußeren Zonen die Lösungen vom M -Typus sind,

ist, bei kleiner Kernmasse, bestimmt ein Kern möglich, während dies bei großer Kernmasse zweifelhaft ist. *L. Biermann* (Göttingen).

Bueerius, H.: Zur kosmischen Zerfallshypothese. *Astron. Nachr.* **244**, 265—272 (1931).

Die vom Verf. in *Astron. Nachr.* **243**, 235 (dies. Zbl. **2**, 212) entwickelte kosmische Zerfallshypothese wird in der vorliegenden Arbeit in erweiterter Form dargelegt und auf den engen Zusammenhang der Entwicklung des Nova-Spektrums mit dem Zerfallsprozeß hingewiesen. Es wird ein Versuch gemacht, die neuen Sterne in das Russellsche Diagramm einzureihen, und zwar als einen Übergangsprozeß, der die Verbindung zwischen getrennten Entwicklungsästen des Diagramms (normale Zwerge und weiße Zwerge) herstellt. Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, die Sterne des dritten Astes (weiße Zwerge) als Zerfallsprodukte der Sterne der Hauptsequenz und diese selbst vielleicht wiederum als ebensolche einer bereits zum größten Teil zerfallenen, früheren parallelen Sequenz größerer Masse und absoluter Leuchtkraft aufzufassen, die noch in Übergiganten und Riesen späterer Spektralklassen Vertreter haben könnte.

Hubert Slouka (Prag).

Kothari, D. S., und R. C. Majumdar: Die Opazität eines entarteten Gases. *Astron. Nachr.* **244**, 65—78 (1931).

The authors employ the usual methods to evaluate the opacity of an ionised gas in which the free electrons obey the Fermi-Dirac statistics and may be degenerate. They make use of transition probabilities given by Gaunt, and of collision probabilities given by various authors listed in an appendix. Their results should be compared with Swirles (dies. Zbl. **2**, 237) and Chandrasekhar (dies. Zbl. **2**, 375). Their value for free-free transitions in a non-degenerate gas agrees with that of Swirles, but for a degenerate gas is double her value. They calculate the contribution of the bound-free transitions to the opacity, allowing for the different degrees of ionisation, and show that it is negligible compared with the free-free part. In this connection they discuss the ionisation formula for a degenerate gas, and the effect of "pressure ionisation". The effect of the relativity correction is shown by the following table of the behaviour of the opacity coefficient as regards the temperature T , and the number of electrons per unit volume n

	Non-relativistic	Relativistic
Non-degenerate	$n/T^{7/2}$	n/T^3
Degenerate	$1/T^2$	constant

W. H. McCrea (Edinburgh).

Seares, Frederick H.: Note on changes in the luminosity function with distance from the sun. (*Mount Wilson Observ., Carnegie Inst., Washington.*) *Astrophys. J.* **74**, 312—319 (1931).

Die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **2**, 375) gefundene unwahrscheinlich starke Abnahme der Sterndichte mit wachsender Entfernung von der Sonne wird auf eine Abhängigkeit der Leuchtkraftverteilung von der Entfernung und von der galaktischen Breite zurückgeführt, wofür sich auch in van Rhijns Untersuchung [*Groningen Publ.* **38** (1926)] Anzeichen finden. Der lokale Haufen der B-Sterne bedingt in der Umgebung der Sonne einen Überschuß an absolut hellen Sternen; daher ergibt die Voraussetzung einheitlicher Leuchtkraftverteilung zu hohe Dichte nahe der Sonne und zu geringe Dichte in größerer Entfernung. *Wempe* (Göttingen).

Seares, Frederick H.: A numerical method of determining the space density of stars. (*Mount Wilson Observ., Carnegie Inst. of Washington, Washington.*) *Astrophys. J.* **74**, 268—287 (1931).

Der Verf. entwickelt eine einfache Näherungsmethode zur Auflösung der fundamentalen Integralgleichung der Stellarstatistik

$$N(m) dm = \omega dm \int_0^{\infty} \Phi(M) D(\varrho) \varrho^2 d\varrho. \quad M = m - 5 \log \varrho$$

$N(m)$ und $\Phi(M)$ sind die Verteilungsfunktionen von scheinbarer und absoluter Helligkeit, ω ist ein konstanter Raumwinkel, $D(\varrho)$ die gesuchte Sterndichte als Funktion der Entfernung. Die von Schwarzschild [Astr. Nachr. **185**, 81 (1910)] gegebene strenge Lösung der Gleichung ist in der Praxis unbequem. Deshalb machte man bisher immer die Voraussetzung, daß $N(m)$ und $\Phi(M)$ Gaußsche Fehlerfunktionen seien, wodurch sich $D(\varrho)$ als Fehlerfunktion für $\log \varrho$ ergab. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß es alle Unregelmäßigkeiten in $N(m)$ und damit in $D(\varrho)$ wegglättet, so daß das evtl. Vorhandensein von Sternwolken nicht mehr erkennbar ist. Das vom Verf. vorgeschlagene rein numerische Näherungsverfahren besteht darin, daß statt des Integrals eine gewöhnliche Summe von Sternzahlen in aufeinanderfolgenden Raumelementen benutzt wird, daß also — übrigens mit für die Praxis wesentlichen, hier aber aus Platzmangel nicht zu referierenden Einzelheiten — das analoge lineare Problem der Algebra behandelt wird. Das Verfahren bleibt anwendbar in Fällen, in welchen $\Phi(M)$ auch noch explizite von ϱ abhängt. Das wiedergegebene numerische Beispiel ist mit von ϱ unabhängigem $\Phi(M)$ gerechnet und führt auf einen Dichteverlauf, der diese Unabhängigkeit zu widerlegen scheint. Der Verf. geht darauf ein in einer weiteren Arbeit [Astrophys. J. **74**, 312—319 (1931); vgl. vorst. Referat]. *Heckmann* (Göttingen).

Geophysik.

Brillouin, Marcel: Développement en fonctions harmoniques sur la sphère d'une fonction dont la valeur est donnée en chaque point du rivage continental. Représentation conforme. C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 1360—1364 (1931).

Untersuchung der möglichen Schwingungsformen eines Ozeans mit beliebigen Konturen führt auf folgendes allgemeine Hilfsproblem: Die Konturen eines Kontinents seien gegeben durch die geographischen Koordinaten Länge α und Sinus der Breite μ . Jeder Breitenkreis schneide die Küsten nur in zwei Punkten, die durch die Gleichungen $\alpha = f(\mu)$, $\alpha = g(\mu)$ bestimmt seien. An den nördlichen und südlichen Enden des Kontinents sind f und g gleich; außerhalb sind f und g konjugiert komplex. Die Funktion $\sin^2[(\alpha - f)/2] \sin^2[(\alpha - g)/2]$ verschwindet auf den Konturen, und nur dort. Sie läßt sich leicht nach Kugelfunktionen der Ordnung 0, 1 und 2 entwickeln, mit reellen Koeffizienten. Ähnlich gebaute Funktionen und Reihenentwicklungen nach solchen werden für kompliziertere Küstenformen angegeben, auch für den allgemeineren Fall, daß die Funktion an den Küsten vorgegebene Werte annehmen soll. Dieselbe Entwicklungsmethode ist, wenigstens formell, auf andere Rotationskörper anwendbar, und sie kann als Ausgangspunkt der Anwendung des Ritzschen Verfahrens zur Lösung partieller Differentialgleichungen dienen. *J. Bartels* (Washington).

Smoljakov, P.: Zwei Ergebnisse aus den Hesselbergschen Gleichungen. Izv. fiz.-mat. Obšč. kazán. Univ., III. s. **4**, 63—70 (1931).

Für die örtliche Druckänderung Dp/Dt — d. i. die Summe aus lokaler und konvektiver Druckänderung in der vertikalen Richtung — ergibt sich

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{dp}{dt} - w \frac{\partial p}{\partial n} \cos(\alpha - \gamma),$$

wo dp/dt die individuelle Druckänderung, w die gesamte Windgeschwindigkeit, $\partial p/\partial n$ den totalen Druckgradienten, α den Winkel zwischen diesem und der x -Achse, γ zwischen jener und der x -Achse bedeutet. Nähere Diskussion dieser Formel zeigt, daß sie außer vielleicht in einigen Bezirken Westeuropas mit sehr dichtem und zuverlässigem Stationsnetz Resultate gibt, bei denen die möglichen Fehler von der Größenordnung der zu ermittelnden Werte sind. Ferner wird eine Formel für den Betrag des Windvektors w aufgestellt, die sich angenähert integrieren läßt. Aus der Integralformel ergeben sich einige Schlußfolgerungen, die Verf. in Beziehung zu den Guilbertschen Regeln bringt.

Haurwitz (Leipzig).

Roberts, O. F. T.: Some effects of turbulent pressure. *Nature* (Lond.) 1932 I, 23—24.

The author quotes a result of Ertel and of McCrea that turbulence in the atmosphere reduces the barometric pressure by an amount $\rho w'^2$ dynes/cm², where ρ is the density, and w' the vertical component of turbulent velocity. He derives the consequence that, if w'^2 is different at two points on the same level, then for stability the contributions of the horizontal components to the eddy-energy must differ by the same amount. He suggests that certain observed wind phenomena may be explained by allowing for the time necessary to attain this adjustment of the eddy-energy. He relates the phenomenon to the fact that two dimensional turbulence is not possible in liquid between vertical rotating cylinders. W. H. McCrea (Edinburgh).

Fabris, Cesare: Teorie moderne su l'origine e su la struttura dei cicloni. *Pubbl. Com. naz. ital. Geodes. e Geofis. Nr 2*, 1—106 (1931).

Die Arbeit gibt eine elementare Einführung in die modernen Anschauungen über die Entstehung und Struktur der Zyklonen unserer Breiten. Sie behandelt demzufolge vor allem die Arbeiten der norwegischen Meteorologenschule. Zunächst wird die Lage der Isobaren- und Diskontinuitätsflächen in einer bewegten Flüssigkeit behandelt. Ferner werden die Struktur und die Wellentheorie der Zyklonen sowie die Anschauungen über die Zyklonenfamilien besprochen. Daran schließt sich eine Behandlung des Bjerknesschen Zirkulationssatzes und seine Erweiterung durch Ansel, sowie die Ableitung der Formeln von Gião für die Bewegung der Fronten. Die Einwände gegen die Theorie, besonders gegen die Wellennatur der Zyklonen werden erwähnt, ebenso die Theorien von Exner, Ficker, Stüve und anderen. Im Anhang werden noch einige Formeln von J. Bjerknes über die Neigung von Fronten im beschleunigten Falle gebracht und Formeln von Gião, die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Front aus dem Druckfelde zu berechnen erlauben. Haurwitz (Leipzig).

Berlage jun., H. P.: Zur theoretischen Begründung der Lage der Rossbreiten. *Meteor. Z.* 48, 425—430 (1931).

Von dem empirischen Befund ausgehend, daß das planetarische Windsystem in großen Zügen durch $v_\lambda/v_\varphi = -c$ dargestellt werden kann (v_λ, v_φ = zonale bzw. meridionale Windkomponente in Bodennähe, c = positive Konstante, λ nach W positiv), findet Verf. mit Hilfe des Satzes vom Rotationsmoment unter Berücksichtigung der Reibung (R_λ, R_φ) = $-k(v_\lambda, v_\varphi)$ die Lage ($\bar{\varphi}$) der Rossbreiten durch den Ausdruck $\sin \bar{\varphi} = kc/\omega$ bestimmt (ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation). Eine elementare Betrachtung über die atmosphärische Energiebilanz ergibt $kc/\omega = 2(1 - \pi/4) = 0,43$, woraus $\bar{\varphi} = 25^\circ$ folgt. Ertel (Berlin).

Corlin, Axel: An indication of a correlation between cosmic ultra-radiation and terrestrial magnetism. *Lund Observ. Circ. Nr 1*, 3—12 (1931).

Die in Åbisko (Nordschweden) ausgeführten Messungen der Ultrastrahlung zeigen einen deutlichen Zusammenhang mit der Intensität der gleichzeitig auftretenden Nordlichterscheinungen. Die Strahlung bei stärkstem Nordlicht war im Mittel etwa um 0,2 J stärker als an nordlichtfreien Tagen. Eine nähere Untersuchung dieser Beziehungen zeigt, daß nach dem Einsetzen größerer magnetischer Störungen fast stets Strahlungserhöhung beobachtet wird, während durch einige Stunden vorher die Strahlung eher etwas erniedrigt ist. Die Amplitude dieser Intensitätsschwankung beträgt in Åbisko 4—5% der Strahlungsintensität und ist fast gleichgroß wie die relative Schwankung der erdmagnetischen Horizontalintensität. Der Verf. ist der Ansicht, daß Ultrastrahlung und Totalintensität des Erdmagnetismus einander proportional sein könnten. Er sucht diese Ansicht durch Analyse der bisherigen (zum Teil einander widersprechenden) Messungen des „Breiteneffektes“ (Abhängigkeit der Ultrastrahlungsstärke von der geographischen Breite) zu stützen. Die weitere Verfolgung des Breiteneffektes wird als besonders notwendig erkannt. V. F. Hess.

Kolhörster, W., und L. Tuwim: Die spezifische Ionisation der Höhenstrahlung. (*Höhenstrahlungslabor., Meteor.-Magnet. Observ., Potsdam.*) Naturwiss. 1931 II, 917.

Die Verf. berechnen, daß die Korpuskeln der kosmischen Strahlung (Ultra- β -Strahlen) etwa 135 Ionenpaare pro Zentimeter ihres Weges in Luft erzeugen; dies ist etwa dreimal soviel als die spezifische Ionisation schneller β -Strahlen der radioaktiven Substanzen (45 Ionenpaare/cm). Ferner wird die Energie einer einzelnen kosmischen Korpuskel errechnet und ergibt sich — diesmal völlig unabhängig von der Klein-Nishina-Formel und speziellen Annahmen über die Natur der Korpuskeln — zu $> 2 \cdot 10^9$ e-Volt. V. F. Hess.

Försterling, K., und H. Lassen: Die Ionisation der Atmosphäre und die Ausbreitung der kurzen elektrischen Wellen (10—100 m) über die Erde. III. Die praktische Ausbreitung der kurzen Wellen. (*Inst. f. Theoret. Phys. u. Inst. f. Techn. Phys., Univ. Köln.*) Z. techn. Phys. 12, 502—527 (1931).

Formeln für die Brechung und die Reichweite der kurzen Wellen werden abgeleitet und mit Versuchsergebnissen verglichen. Es muß eine Grenzwellenlänge existieren, unterhalb welcher die Wellen nicht mehr genügend gebrochen werden, um zur Erde zurückzukehren. Sie liegt nach der Erfahrung bei 10 m Wellenlänge, woraus auf eine maximale Elektronendichte am Tage von $1,3 \cdot 10^6$ Elektronen pro Kubikzentimeter geschlossen wird. Die Bestimmung der Höhe der ionisierten Schichten nach der Signal- und der Interferenzmethode wird besprochen. Feldstärkeberechnungen stützen die Ansicht, daß kurze Wellen auf große Entfernungen durch Zickzackreflektion zwischen Erde und ionisierter Schicht übertragen werden, weil lange Wege innerhalb der ionisierten Schicht viel zu geringe Feldstärken ergäben. Kurze Wellen werden im allgemeinen an der oberen Schicht (maximale Ionisation zwischen 200 und 400 km Höhe) reflektiert, gehen also durch die untere, schwächer ionisierte Schicht in 100—150 km Höhe hindurch. (I. u. II. vgl. dies. Zbl. 3, 45.) J. Bartels (Washington).

Wigand, A., und E. Frankenberger: Die elektrostatische Stabilisierung von Nebel und Wolken und die Niederschlagsbildung. (*Meteor. Versuchsanst., Dtsch. Seewarte, Hamburg.*) Ann. Hydrogr. 59, 353—363 u. 398—403 (1931).

Die Beständigkeit von Wolken und Nebel wird darauf zurückzuführen versucht, daß die einzelnen Nebeltröpfchen hohe gleichartige elektrische Ladungen tragen sollen, die dem durch die Wärmebewegung der Teilchen (Diffusion und Brownsche Bewegung) und durch die Strömungsstruktur der Luft (Turbulenz und Lamellenscherung) verursachten Zusammenfließen entgegenwirken. Die dazu erforderliche Mindestzahl von Elementarladungen jedes Teilchens wird berechnet und mit den experimentell erhaltenen Tropfenladungen verglichen. Es zeigt sich, daß beständiger trockener Nebel hohe gleichartige Ladung seiner einzelnen Tropfen oberhalb der berechneten Grenzlادung besitzt; unbeständiger nässender Nebel hat nur geringe oder auch nicht gleichartige Tropfenladungen mit Werten unterhalb der berechneten Grenzlادung; die elektrostatische Abstoßung verhindert demnach tatsächlich das Zusammenfließen der kleinen Nebelteilchen zu größeren Nebel- und Regentropfen. — Die Niederschlagsbildung wird rechnerisch erfaßt durch Anwendung der Smoluchowskischen Koagulationskinetik von Hydrosolen auf die ungeladenen Tröpfchen in den Regenwolken. Es zeigt sich, daß die Koagulation durch Wärmebewegung allein praktisch keine Bedeutung für die Niederschlagsbildung hat, daß aber die Koagulation homogener ungeladener Wolken unter der Wirkung der Strömungsstruktur eine mit den Beobachtungen gut übereinstimmende Regenintensität liefert. Die Koagulationsgeschwindigkeit wird durch Ladungen, die unterhalb der Grenzlادung liegen, nicht wesentlich beeinflusst. Zum vollständigen Verschwinden von Wolken und Nebel innerhalb weniger Stunden reicht das durch die Koagulation erzeugte Ausregnen allein nicht aus; hierzu ist die Mitwirkung der Verdunstung erforderlich. Schlomka (Greifswald).

Baidaff, B. I.: Über das Problem von Pothénot. Bol. mat. (Baidaff) 4, 121—124 (1931) [Spanisch].